il Libro **MISTO**

Federico Batini

ANALIZZO, INTERPRETO, RISOLVO

Percorsi per competenze

LŒSCHER EDITORE
E BELLO DOPPO IL MORIRE VIVERE ANCHORA

/ ASSE MATEMATICO

Federico Batini

Analizzo, interpreto, risolvo

Percorsi per competenze

LŒSCHER EDITORE
E BELLO DOPPO IL MORIRE VIVERE ANCHORA

LŒSCHER
EDITORE
TORINO

http://www.loescher.it

Ristampe

6	5	4	3	2	1	N
2019	2018	2017	2016	2015	2014	

ISBN 9788858310496

Nonostante la passione e la competenza delle persone coinvolte nella realizzazione di quest'opera, è possibile che in essa siano riscontrabili errori o imprecisioni. Ce ne scusiamo fin d'ora con i lettori e ringraziamo coloro che, contribuendo al miglioramento dell'opera stessa, vorranno segnalarceli al seguente indirizzo:

Loescher Editore s.r.l.
Via Vittorio Amedeo II, 18
10121 Torino
Fax 011 5654200
clienti@loescher.it

Loescher Editore S.r.l. opera con sistema qualità certificato CERMET n. 1679-A secondo la norma UNI EN ISO 9001-2008

Contributi
I percorsi sono realizzati in collaborazione con Andrea Paolini

Realizzazione
Coordinamento editoriale: Rebecca Impellizzieri
Redazione: Gianna Innocenti
Ricerca iconografica: Emanuela Mazzucchetti
Progetto grafico: Fregi e Majuscole - Torino
Realizzazione tecnica: LIV - Torino
Copertina: Leftloft – Milano/New York
Fotolito: Graphic Center – Torino
Stampa: Sograte Litografia – zona industriale Regnano
06012 – Città di Castello (Perugia)

Indice

Le relazioni fra il microcosmo personale e il macrocosmo dell'umanità e del pianeta oggi devono essere intese in un duplice senso. Da un lato tutto ciò che accade nel mondo influenza la vita di ogni persona; dall'altro, ogni persona tiene nelle sue stesse mani una responsabilità unica e singolare nei confronti del futuro dell'umanità.

La scuola può e deve educare a questa consapevolezza e a questa responsabilità i bambini e gli adolescenti, in tutte le fasi della loro formazione. A questo scopo il bisogno di conoscenze degli studenti non si soddisfa con il semplice accumulo di tante informazioni in vari campi, ma solo con il pieno dominio dei singoli ambiti disciplinari e, contemporaneamente, con l'elaborazione delle loro molteplici connessioni. È quindi decisiva una nuova alleanza fra scienza, storia, discipline umanistiche, arti e tecnologia, in grado di delineare la prospettiva di un nuovo umanesimo.

In tale prospettiva, la scuola potrà perseguire alcuni obiettivi, oggi prioritari:

- insegnare a ricomporre i grandi oggetti della conoscenza – l'universo, il pianeta, la natura, la vita, l'umanità, la società, il corpo, la mente, la storia – in una prospettiva complessa, volta cioè a superare la frammentazione delle discipline e a integrarle in nuovi quadri d'insieme;
- promuovere i saperi propri di un nuovo umanesimo: la capacità di cogliere gli aspetti essenziali dei problemi; la capacità di comprendere le implicazioni, per la condizione umana, degli inediti sviluppi delle scienze e delle tecnologie; la capacità di valutare i limiti e le possibilità delle conoscenze; la capacità di vivere e di agire in un mondo in continuo cambiamento;
- diffondere la consapevolezza che i grandi problemi dell'attuale condizione umane (il degrado ambientale, il caos climatico, le crisi energetiche, la distribuzione ineguale delle risorse, la salute e la malattia, l'incontro e il confronto di culture e di religioni, i dilemmi bioetici, la ricerca di una nuova qualità della vita) possono essere affrontati e risolti attraverso una stretta collaborazione non solo fra le nazioni, ma anche fra le discipline e fra le culture. […]

Lo Stato stabilisce le norme generali cui devono attenersi tutte le scuole, siano esse statali o paritarie. Tali norme comprendono: *la fissazione degli obiettivi generali del processo formativo e degli obiettivi specifici di apprendimento relativi alle competenze degli studenti*; le discipline di insegnamento e gli orari obbligatori; gli standard relativi alla qualità del servizio; i sistemi di valutazione e controllo del servizio stesso.

Con le Indicazioni nazionali s'intendono fissare gli obiettivi generali, gli obiettivi di apprendimento e i relativi traguardi per lo sviluppo delle competenze dei bambini e ragazzi per ciascuna disciplina o campo di esperienza.

(*Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*, disponibili sul sito *www.loescher.it/competenze*)

Introduzione

1. Matematica e noci di cocco

Bambini brasiliani che vendevano frutta, dolciumi o bibite lungo le strade e nei mercati erano in grado di svolgere calcoli mentali anche complessi per stabilire il prezzo giusto da richiedere al compratore o per effettuare calcoli relativi al resto da dare. Gli stessi bambini, se richiesto loro di effettuare calcoli della stessa difficoltà in contesto scolastico, si trovavano in seria difficoltà (Carraher, Carraher, Schlieman, 1985). I ricercatori avevano chiesto a un bambino di calcolare il prezzo di due noci di cocco del costo di 40 cruzeiros ciascuna e il resto da dare a un cliente che avrebbe pagato con una banconota da 500 cruzeiros. Il bambino aveva risposto velocemente ai due quesiti. In particolare sommando mentalmente da 80 fino a 420 (80, 90, 100, 420) e dunque arrivando a 100, da 80 (il prezzo di acquisto) per calcolare i 20 mancanti alla cifra tonda e poi calcolando velocemente gli altri 400, aveva raggiunto la risposta relativa al resto in pochi istanti. Lo stesso tipo di calcolo proposto in modalità scolastica e dunque attraverso la notazione formale che si insegna a scuola aveva prodotto una forte confusione. Alla domanda astratta: "quanto fa 420 + 80?" il bambino, eseguendo il calcolo in forma scritta aveva risposto "130". Aveva sommato 0 con 0, aveva sommato 8 con 2 calcolando che si riportava 1, 1 era stato poi sommato a 4, trovando 5 e infine di nuovo sommando al 5 l'8 e trovando 13 a cui era stato aggiunto lo 0 trovato inizialmente dando così 130. "Facendo matematica per strada i bambini compiono calcoli aritmetici in modi molto diversi da quelli insegnati a scuola. Uno dei modi maggiormente utilizzati per fare i calcoli mentali nei mercati di strada è quello della scomposizione, che consiste nel suddividere un numero in parti e calcolare ognuna di esse separatamente"[1] (Mason, 2013, p. 44).

1. "Il calcolo 200 − 35, ad esempio, è stato così svolto mentalmente da una ragazza: *Se fosse 30, il risultato sarebbe 70. Ma è 35. Così è 65, 165.* Si trattava quindi di scomporre il 200 in 100 + 100, poi il 35 in 30 + 5 e sottrarre tutti questi, in sequenza, da 100 (cioè 100 − 30 = 70 e 70 − 5 = 65), infine sommare il 100 messo da parte inizialmente. Il metodo formale insegnato a scuola per fare le sottrazioni, che richiede, quando necessario il prestito da una colonna e il riporto in quella successiva, conduceva spesso a compiere errori che non emergevano affatto nei calcoli della matematica di strada. Un'altra differenza tra il calcolo mentale in contesto pratico e il calcolo con carta e penna in contesto formale scolastico riguardava il fatto che nel primo caso si procede dalle centinaia alle decine e da queste alle unità, mentre nel secondo caso si procede in direzione opposta, partendo dalle unità e arrivando alle centinaia. Inoltre, i metodi della matematica scolastica erano considerati da quei bambini come regole da seguire, ma non da comprendere e fare proprie.[…] Nella matematica orale viene mantenuto il riferimento al valore relativo di un numero, mentre nella matematica scritta la rappresentazione dei valori relativi dei numeri viene *scaricata* sui valori posizionali delle cifre ed è necessario rispettare l'incolonnamento corretto e le regole procedurali. Ancora, nella matematica orale il calcolo è condotto da valori numerici maggiori a quelli minori, ma con il vincolo di non poter utilizzare valori numerici molto alti o liste lunghe di numeri; nella matematica scritta, invece, i limiti di memoria possono essere superati e sono possibili calcoli su liste lunghe di numeri. Nella matematica orale è forte il riferimento alle quantità reali implicate in un problema, mentre nella matematica scritta le procedure si basano su regole formali che non richiedono la comprensione degli aspetti situazionali presenti nel testo di un problema."

Secondo la teoria del contesto di Cole (Cole, 1996; Cole, Gay, Glick, Sharp, 1971; Stenberg, a cura di, 1982; Flavell, Markman, a cura di, 1983) le esperienze di apprendimento sono organizzate attraverso schemi di rappresentazione della conoscenza, in cui il "contesto" assume il significato di "un sistema di attività strutturate" in cui i soggetti interagiscono e le differenze individuali nelle prestazioni risultano come frutto della diversità delle situazioni specifiche in cui vengono assegnati e svolti i compiti. Schemi e contesto non sono in opposizione come appartenenti gli uni alle dimensioni cognitive del soggetto e l'altro all'aspetto culturale, bensì come poli della stessa dimensione: "lo schema diventa infatti la versione cognitiva, interna, del contesto. L'attività cognitiva è pertanto intesa da Cole quale processo intersoggettivo, socialmente organizzato, che si realizza attraverso l'interazione fra gli individui in uno specifico contesto. […] Ne deriva che l'apprendimento è una pratica *situata*, ancorata, cioè, a quei contesti, socialmente e culturalmente organizzati; non esiste apprendimento che non sia situato in un contesto" (Mason, a cura di, 2013, p. 42).

Proviamo a vederlo in un'esperienza concreta di ricerca azione: "L'esperienza con i *kpelle* della Liberia (Africa centrale) portò Cole e colleghi (Cole, Gay, Glick, Sharp, 1971, n.d.a.) a teorizzare che la manifestazione delle differenze culturali nelle attività cognitive è determinata maggiormente dalle condizioni in cui vengono attivati i processi cognitivi che dalle diversità di funzionamento mentale. Cole (Cole, 1996) si era recato in quel paese africano per preparare un curricolo innovativo per l'apprendimento della matematica, basato su uno simile costruito negli Stati Uniti, visto che gli alunni della tribù dei *kpelle* manifestavano lacune molto evidenti rispetto ai coetanei americani. Andando a visitare le scuole, si rese conto delle possibili ragioni delle difficoltà lamentate dagli insegnanti. In classi molto affollate (40-50 alunni), gli studenti dovevano spesso ripetere filastrocche e formule da imparare di cui non comprendevano il significato; ai loro occhi la matematica era essenzialmente una questione di memorizzazione e ripetizione. Al di fuori della scuola, però, quegli stessi bambini esibivano abilità di calcolo rilevanti. Se in classe sembravano incapaci di imparare, nella vita quotidiana se la cavavano molto bene con misure, stime e calcoli. Analizzando le attività matematiche svolte dai bambini *kpelle* al di fuori della scuola, nonché i modi mediante cui gli adulti insegnavano loro le conoscenze richieste per diventare, a loro volta, degli adulti abili nel loro contesto quotidiano, Cole (Cole, 1996) poté comprendere fino in fondo quanto siano cruciali le condizioni specifiche in cui vengono attivati i processi cognitivi. Anche gli adulti *kpelle* potevano, ad esempio, incontrare difficoltà a svolgere le prove di intelligenza costruite per i soggetti americani ma, allo stesso tempo, saperle eseguire molto più positivamente se proposte utilizzando oggetti e contenuti riferiti alla loro vita. L'influenza delle diverse modalità di presentazione di un compito, del significato attribuito al compito stesso, nonché del livello di scolarizzazione sulle abilità cognitive, in particolare quelle richieste dalla scuola, diventa del tutto evidente" (Mason, 2013, pp. 42-43).

Le ricerche svolte in Brasile riportate inizialmente hanno documentato ulteriormente e confermato quanto affermato sopra.

"La matematica non sarà mai il mio mestiere" cantava Antonello Venditti in "Notte prima degli esami", esprimendo così, con una frase post-adolescenziale, il disagio di un popolo rispetto a un campo di sapere. Siete a cena con gli amici, la serata è piacevole, informale, persino allegra. Provate a introdurre un argomento che riguardi, anche solo in parte, la matematica. Non ci sono dubbi che qualcuno, cambiando espressione, interverrà, prima ancora che possiate dire ciò che volevate, per affermare: "io e la matematica siamo due cose diverse" oppure "io per la matematica non sono portato" ed altre frasi consimili. Ora, provate ad affermare che ciò che state per dire è, in realtà, molto semplice e spiegatelo. Chi ha esordito con qualche affermazione del tipo di quelle citate non vi sta dando l'impressione di non ascoltarvi? O di ascoltarvi parzialmente? O di farlo scuotendo, al tempo, la testa?

In un certo senso affermare la propria distanza assoluta dalla matematica può essere ritenuto persino "divertente", senza dubbio è socialmente accettabile. Provate a immaginare le stesse persone che dicono: “Io non sono in grado di leggere e scrivere nemmeno una parola” oppure “Io e l’ortografia siamo su due pianeti diversi”. Risulta meno comune come esperienza, giusto? E la persona che dovesse pronunciare queste frasi riceverebbe meno sorrisi di comprensione e complicità.

Non esiste altra disciplina come la matematica, rispetto alla quale esistono “blocchi mentali” così resistenti. Sarà esperienza comune presso gli insegnanti quella di tentare, in ogni modo, di forzare quei blocchi e quelle resistenze, ma di trovarsi di fronte a fortificazioni, chiusure stagne e “sordità”. In quelle condizioni pare che qualsiasi artificio didattico, qualsiasi tentativo, spiegazione, facilitazione, esemplificazione sia inutile.

Torniamo indietro.

Circola da tempo una storiella presentata in molteplici versioni che racconta di un cane, di un osso e di altri che contendono l’osso al cane. Si tratta di una di quelle storielle edificanti che servono a far comprendere cose altrimenti ostiche. In questo caso risulta di estrema utilità il suo uso in ambito didattico per mostrare la relazione esistente tra matematica e vita quotidiana. Il primo ostacolo all’apertura alla matematica sta proprio qui: troppo spesso la matematica viene avvertita come qualcosa di estremamente distante, non in grado di essere utile se non in ambiti di lavoro scientifico, legata a formalizzazioni che non hanno a che fare con la realtà, incapace di incidere sulla nostra esistenza di ogni giorno. Eppure, ci dimostra questa storiella, la matematica viene utilizzata, implicitamente, persino dagli animali. Torniamo alla storiella: un cane ha di fronte un osso e altri tre cani. Il cane vorrebbe l’osso, ma váluta che la sua forza è inferiore alla forza di tre cani, per cui, a malincuore, lancia un ultimo sguardo all’osso e se ne va. Qualcuno potrebbe asserire che il cane non sa contare. L’affermazione può essere vera, tuttavia il cane avrà valutato non in termini di: “io sono uno e loro sono tre” ma di “sono solo contro molti” e avrà tratto la giusta conclusione, il suo ragionamento è, a tutti gli effetti, un ragionamento matematico. Quale? Il cane avrà fatto una valutazione in termine di maggiore (i tre cani) e minore (lui solo). Di fronte a due insiemi (un insieme con tre cani e un insieme con un solo cane, lui stesso) avrà stabilito una relazione d’ordine (maggiore-minore) e di forze. Non gli è sufficiente la relazione maggiore/minore in termini numerici (anche imprecisi, secondo lo schema uno/molti già enunciato) ma gli occorre anche stabilire che l’insieme con tre cani possiede una “forza” maggiore dell’insieme con un solo cane. Vediamo come la stessa storiella ci aiuta a comprendere meglio questa differenza. Lo stesso cane, alcuni giorni dopo, si trova nella medesima situazione, con un osso davanti, in bella vista. Questa volta a contenderlo ci sono tre topi. I nuovi insiemi stanno nella relazione di prima (maggiore/minore), tuttavia il cane questa volta prende l’osso e se ne va in tutta tranquillità. Il cane avrà dunque, questa volta, valutato non soltanto il rapporto numerico (o le grandezze, insomma), ma anche le forze. Avrà cioè stabilito che l’insieme con i tre topolini ha minore forza complessiva dell’insieme con un solo cane. Numeri e forze, due concetti essenziali per l’approccio a qualsiasi area di sapere e di competenza scientifica, sono al centro di questa storia. Come potremmo sintetizzare quanto appreso? A parità di “peso” vale il principio numerico (molti sono più di uno), mentre in caso di disparità di peso è il concetto di “forza” a prevalere. Un cane di fronte a un cane ha lo stesso “peso”, per cui prevale il concetto di quantità (tre cani sono più di uno). Un cane di fronte a tre topi ha “peso” assolutamente differente, per cui si introduce il concetto di “forza” e la forza del cane è prevalente rispetto alla quantità. Un cane, in definitiva, è più forte di tre topi.

Qualcuno potrebbe osservare che il ragionamento è elementare. Certo, lo è, ma è attraverso alcuni ragionamenti elementari che si introducono i concetti matematici fondamentali, quelli che poi consentono, riferendoci all’esempio citato, di usare facilmente, per apprendere altro, i concetti di quantità, di peso, di forze.

La valenza della storiella è, però, un’altra: dimostrare la relazione della matematica con la vita quotidiana di uomini e, addirittura, degli animali. In questo caso, per il cane, l’utilizzo di concetti matematici “grezzi” è essenziale ai fini della sopravvivenza. Predatori e prede, seppure non sappiano probabilmente formalizzare questi concetti, sanno bene che quantità e forze regolano la loro vita. Quando alcuni animali accumulano provviste, quando valutano la possibilità di un attacco o di una fuga, quando verificano che tutti i cuccioli siano insieme al branco, quando stimano la fattibilità di un salto o la sicurezza offerta da una certa distanza, stanno usando, pur senza saperlo, concetti matematici fondamentali. In qualche modo la matematica è "naturale", artificiale è il linguaggio simbolico che abbiamo scelto per rappresentarla.

Dimostrare come tutti noi utilizziamo moltissimi concetti matematici durante la giornata, proporre casi familiari, utilizzare l'esperienza propria ed altrui (per esempio usando storie e narrazioni) per introdurre concetti matematici è una buona pratica, riconosciuta tale dai più, ma ancora poco praticata. Le ricerche presentate nella parte introduttiva di questo stesso paragrafo ci forniscono, eppure, più di un'indicazione in tal senso. Contesti significativi, presi dall'esperienza quotidiana, problemi ancorati alla realtà sperimentata costituiscono, senza dubbio, la base sulla quale innestare formalizzazioni a posteriori.

Apprendere le competenze dell'asse matematico significa, soprattutto, far interagire la matematica con la propria esistenza, riconoscere che la usiamo molto più di quanto ci sembri, comprenderne l'utilità, interiorizzarne i concetti fondamentali, pensarla come uno strumento e un modo di rappresentare la realtà e non come una scienza misteriosa e astratta, accessibile a pochi.

La matematica non è estranea alla vita, anzi ne fa parte strutturalmente, non è intrinsecamente noiosa, anzi può essere addirittura sorprendente, non è irrilevante, ma fondamentale. Confrontando i nostri esiti, anche nelle prove internazionali di valutazione delle competenze, con quelli di altri paesi, per quanto concerne la *numeracy* (la capacità di utilizzare concetti, regole, procedure della matematica per affrontare situazioni e risolvere problemi concreti) bisogna pensare, forse, a una ridefinizione del nostro approccio didattico[2].

Nel ricordo di molti l'esperienza dell'apprendimento della matematica si traduce in sofferenza per la memorizzazione di formule, regole, definizioni. Difficilmente qualcuno (i lettori di questo volume potrebbero rappresentare l'eccezione) è riuscito a trasformarla in uno "strumento" per agire, per pensare, per "muoversi".

La matematica non ha uno "statuto speciale", non si sottrae a delle regole molto generali riguardo all'apprendimento.

2. Il riferimento è, soprattutto, al rapporto Skill's Outlook 2013 dell'Ocse che vede l'Italia collocata in penultima posizione per le competenze di *numeracy*. L'imponente ricerca è disponibile on line in versione integrale in numerosi siti e nel blog di chi scrive: *federicobatini.wordpress.com*. Il link sarà reso disponibile nel portale collegato ai quattro Quaderni relativi alle competenze di base (di cui questo rappresenta quello legato all'asse matematico).

Alcuni principi per un apprendimento significativo

Principio	Definizione
Principio del *divertimento*	L'apprendimento può (e dovrebbe) essere occasione di divertimento, un'esperienza piacevole, coinvolgente e appassionante. L'etica della sofferenza, infatti, non ha mai giovato alle esperienze di apprendimento.
Principio del *particolare e del concreto*	Si impara sempre in un dialogo tra particolare e generale, tra concreto e astratto, e partendo dai primi anziché dai secondi.
Principio della *valorizzazione dell'esperienza dei soggetti*	Si impara meglio e più volentieri se gli apprendimenti si collegano tra loro o prendono le mosse dalla nostra esperienza.
Principio dell'*adesione*	Nessuno può insegnare nulla a qualcun altro se l'altro non vuole impararlo: l'apprendimento necessita di partecipazione attiva.

Principio	Definizione
Principio del *protagonismo*	L'apprendimento non è qualcosa che subiamo ma qualcosa che facciamo in prima persona.
Principio della *partecipazione attiva*	Non vi è partecipazione in un processo di apprendimento formale se non viene attribuita importanza a ciò che ciascuno fa e dice.
Principio della *motivazione*	Si è maggiormente disponibili all'apprendimento quando si comprendono il senso e la motivazione di ciò che si sta imparando.
Principio della *rilevanza soggettiva*	Si imparano più facilmente le cose a cui si attribuiscono senso e importanza.
Principio dell'*agentività*	Si impara agendo e confrontandosi sugli esiti delle rispettive azioni, sui tentativi effettuati. Le conoscenze e le nozioni utili a quell'azione non vengono fornite precedentemente in modo teorico, ma successivamente durante l'azione e a supporto di essa.
Principio dell'*utilità dell'errore*	Si impara sbagliando, confrontandosi, sbagliando di nuovo, sino ad arrivare a comprendere quali sono il comportamento giusto, la soluzione adeguata, l'idea migliore. Così facendo si giunge a riconoscere, in autonomia, il percorso più adeguato rispetto alla situazione o problema prospettatoci.
Principio del "*tentar non nuoce*"	Nessuno impara se ha continuamente paura di sbagliare e delle conseguenze del proprio errore.
Principio dell'*enfatizzazione del positivo*	Se si deve correggere qualcuno, lo si fa confrontando diverse soluzioni e sottolineando ciò che di positivo è stato detto e fatto, più che enfatizzando l'errore.
Principio della *valorizzazione delle conoscenze e competenze pregresse*	Si impara e si partecipa attivamente se vengono valorizzate conoscenze e competenze di cui siamo già in possesso.
Principio delle *unità minime e della scomposizione*	Si impara più facilmente quando si è capaci di scomporre un comportamento, un problema, una conoscenza ecc., nei suoi elementi minimi costitutivi.
Principio della *ricomposizione e della capacità di discriminazione*	Si impara con notevoli livelli di permanenza degli apprendimenti, se si è poi capaci di individuare gli aspetti essenziali di un comportamento, di un problema, di una conoscenza, ecc.
Principio dell'*autonomia*	Si impara meglio quando si avverte un'autonomia progressiva nello svolgimento di qualcosa.
Principio della *continuità*	Si impara in maniera continuativa, durante il corso di ogni giornata: anche quando non ce ne accorgiamo, la nostra vita è colma di occasioni di apprendimento da sfruttare.
Principio della *competenza*	Nonostante ciò che possiamo aver sentito dire tutti noi possediamo un'enorme capacità di apprendere e tale capacità può essere rinforzata e potenziata.
Principio del *valore*	L'apprendimento è fondamentale per noi come persone, come lavoratori, e implica conseguenze importanti per noi in quanto singoli soggetti e per il futuro delle società in cui viviamo;

L'apprendimento è un'attività fisiologica dell'uomo, come dormire, alimentarsi, respirare. Le esperienze di istruzione formale spesso riescono a convincerci che non siamo in grado o non siamo abbastanza intelligenti per imparare alcune cose mentre questo non è assolutamente possibile. L'area delle competenze matematiche rappresenta, probabilmente, l'esempio migliore di questi fraintendimenti. Compito di un insegnante diventa allora quello di cercare di costruire le condizioni e le "situazioni" migliori affinché ogni alunno possa essere compreso e percepito come importante, in modo che ciascuno si appropri della propria esperienza di apprendimento, la avverta come qualcosa di interessante, adeguata, pertinente e se ne senta protagonista. Le false credenze sulla propria insufficiente intelligenza o inadeguatezza rispetto a un'area di sviluppo di competenze vanno rimosse tramite l'esperienza diretta, concreta, verificabile del proprio apprendimento.

2. Che cosa significa sviluppare (far sviluppare) competenze

Da alcuni anni le competenze sono entrate a far parte del nostro sistema di istruzione e formazione. Non si tratta di una "sorpresa". Tale introduzione è stata lenta e graduale. Lente, per la verità, sono state anche la ricezione e l'introduzione delle stesse nella didattica.

Perché sono state introdotte le competenze? Rimandando al volume *Insegnare per competenze* (Batini, 2013; disponibile sul sito www.loescher.it/competenze) per una trattazione più distesa sui tempi, norme e modalità di questa decisione, e cioè, si può tuttavia affermare, in sintesi, che il passaggio dai contenuti alle competenze come elementi centrali di progettazione, azione e valutazione didattica sia stato motivato dallo spostamento dell'attenzione dall'insegnamento all'apprendimento. I come e i perché di questo spostamento non possono esaurirsi in poche frasi, le motivazioni sottese sono molte. Proviamo a passare in rassegna le principali, chiarendo, innanzitutto, che cosa significa, precisamente, centrarsi sui contenuti o centrarsi sulle competenze per un sistema di istruzione e formazione.

Un sistema di istruzione centrato sui contenuti, ovvero quello a cui, in varie forme, siamo abituati storicamente, stabilisce quali siano le nozioni e le conoscenze che, all'interno di un determinato periodo storico e in un determinato luogo geografico, occorrono ai giovani per inserirsi in una determinata società, per governare le proprie interazioni personali e sociali, per interiorizzare determinati comportamenti e valori, per fare propri alcuni significati anziché altri. In poche parole un sistema di istruzione che agisce seguendo questi dettami ritiene che vi sia un patrimonio piuttosto stabile di nozioni e conoscenze, che questo patrimonio possa essere trasmesso attraverso la mediazione di un insegnante che "spiega" e l'azione degli alunni che studiano, e che tale trasmissione debba essere controllata attraverso la "verifica" e la "valutazione" dell'insegnante. Si tratta di un sistema che stabilisce delle gerarchie: gerarchie di contenuti (vi sono quelli più importanti, irrinunciabili, e quelli meno), gerarchie di relazioni (l'insegnante stabilisce, con poche "intrusioni" dei colleghi, chi può o meno proseguire il percorso rispetto alla propria materia), gerarchie e delimitazioni del sapere (l'organizzazione "rigida" in discipline che favorisce, ad esempio, la nozione rispetto al contenuto).

In un sistema di istruzione di questo tipo l'insegnante "sa" quali sono le conoscenze e le nozioni essenziali, stabilisce, dentro un insieme definito più dalla "tradizione" che da norme e documenti, quali sono quelle sulle quali occorre soffermarsi di più e cerca di veicolarle, nel modo migliore possibile (ove all'aggettivo "migliore" vengono assegnati molteplici significati). La nozione o la conoscenza (le nozioni o le conoscenze) debbono essere comprese, studiate, ripetute (in forma orale o scritta). All'allievo/a sono richieste azioni come: ascoltare, comprendere, studiare, ripetere. Di queste azioni l'unica non essenziale ai fini del risultato da conseguire è quella di comprendere. All'insegnante è richiesto di: selezionare, spiegare, valutare. L'insegnante è il protagonista del processo, colui le cui azioni comportano responsabilità e decisioni. Le azioni dell'insegnante, tuttavia, tendono ad essere ripetitive da un anno all'altro, da una classe all'altra (con le evidenti variazioni richieste dal cambiamento del gruppo classe). Ovviamente tutto ciò viene fatto meglio da alcuni, peggio da altri, sia per quanto riguarda gli insegnanti che per quanto riguarda gli allievi.

In un sistema di istruzione che sceglie, al contrario, di centrarsi sulle competenze, vengono definiti gli obiettivi in termini di apprendimenti fondamentali: che cosa deve saper fare un/a ragazzo/a alla fine di un anno di istruzione o formazione? Non si pensi alla classica opposizione sapere/saper fare o a quella tra pensiero e azione. In ogni azione *competente* sono contenute delle conoscenze che permeano in profondità il soggetto, in modo tale, cioè, che gli sia consentito mobilizzarle e utilizzarle per agire. Tutti noi adulti abbiamo esperienza di conoscenze e nozioni che ci limitiamo a richiamare alla mente e di altre che, invece, utilizziamo più o meno frequentemente, nei contesti personali e professionali e di come le seconde siano più profonde e possedute in modo più "forte" delle prime. Dunque, centrarsi sulle competenze significa, in poche parole, mettere gli apprendimenti degli allievi (e quindi questi ultimi) al centro dell'intero processo di istruzione e formazione. Contenuti e nozioni servono in relazione all'insegnante per sviluppare competenze, coerentemente con ciò che realmente è utile per tale sviluppo.

Ma quali sono le sequenze di azioni in un sistema per competenze? Un insegnante deve confrontarsi con i documenti e le norme che, a livello ministeriale, definiscono gli obiettivi di apprendimento e farle interagire con i bisogni e i livelli di competenza rilevati nel gruppo classe, deve poi negoziare questi obiettivi con il gruppo classe stesso, in modo da farne comprendere la rilevanza e l'utilità (sarebbe qui opportuno ricordare che le umiliazioni a cui è stato sottoposto il concetto di "utilità" nei nostri sistemi di istruzione ha a che fare con una concezione elitista dell'educazione/istruzione). Lo step successivo è quello di costruire situazioni in cui gli alunni possano sollecitare, esercitare, conquistare la competenza/le competenze obiettivo. Queste situazioni debbono prevedere prioritariamente la proposta di attività di diverso tipo, ma tutte devono essere caratterizzate da un ruolo attivo degli alunni. La lezione frontale potrà essere utile soltanto in certi momenti per fornire nozioni, conoscenze, concetti o procedure necessarie allo svolgimento delle attività proposte. La valutazione può avvenire attraverso l'osservazione nel corso di tali attività, permettendo così di monitorare il progressivo sviluppo della competenza (la competenza si osserva sempre "in azione") o, nei momenti in cui è richiesta, una valutazione che consenta l'espressione di un "voto" per mezzo di prove strutturate (ancora centrate su una performance) che "misurino" l'effettivo raggiungimento della competenza posta come obiettivo dell'unità di apprendimento affrontata.

Seppure non sia questa la sede per una trattazione completa circa il tema della valutazione delle competenze, occorre ricordare come sia necessario distinguere, in particolare nel caso delle competenze, tra auto ed eterovalutazione.
L'autovalutazione delle competenze è un fattore importante, identitario:

> "un indicatore importante qualora ci si trovi nel contesto di dispositivi che a qualche titolo fanno della competenza un segno del valore delle persone. [...] Un soggetto senza competenza, che non sa e non sa fare nulla di socialmente riconosciuto, è innanzitutto un soggetto senza identità, senza un luogo per l'affermazione del proprio valore e del proprio valere: è un individuo che, già ai suoi occhi, non vale nulla" (Di Francesco, 2004, p. 35).

La competenza, tuttavia, non può essere sottomessa alla classica valutazione scolastica che corrisponde a una misurazione, ovvero a una stima quantitativa del modo in cui un compito predefinito (da altri) è stato affrontato e risolto. Vi è infatti una parte, fondamentale, di autovalutazione, che però necessita dell'intersoggettività del riconoscimento, così come ogni aspetto dell'identità di un soggetto ha bisogno di un certo grado di feedback e di conferma da parte degli altri. L'autovalutazione a un primo livello è la semplice consapevolezza di "aver fatto bene" sia in virtù del riconoscimento sociale ricevuto sia della propria percezione. Tuttavia, sapere di aver agito bene non significa necessariamente sapere "perché si è fatto bene", ovvero non significa possedere un'esplicita consapevolezza dei costituenti fondamentali del proprio agire competente. A un secondo livello la competenza è autoriconosciuta in virtù di un processo di esplicitazione (ad esempio quelli legati al metodo del bilancio di competenze) in cui si ricostruisce in modo minuzioso, articolato, esplicito, organizzato la propria (le proprie) competenza(e). Questo secondo livello dovrebbe essere compreso nell'esperienza formativa che si compie nei sistemi di istruzione perché, è bene ricordarlo sempre, la consapevolezza e l'autoriconoscimento, specie in questa fase costituiscono un'occasione per rinforzare la competenza medesima e l'apprendimento. Si genera cioè una retroazione che produce un incremento del livello di padronanza della stessa competenza che si sta valutando. Se dunque è pur vero che, negoziando gli indicatori della competenza *ex ante* con il gruppo con il quale si sta lavorando, è possibile costruire prove (prevalentemente strutturate attraverso performance) e attività che ne consentano l'eterovalutazione, è da ricordare che non privilegiare, nella valutazione, i momenti dedicati all'autovalutazione significa rinunciare al carattere trasformativo e incrementale di quest'ultima rispetto alla competenza stessa.

3. Le 16 competenze di base e le competenze di cittadinanza

Secondo il *Regolamento recante norme in materia di adempimento dell'obbligo di istruzione*, D.M. 22 agosto 2007, n. 139 (G.U. 31 agosto 2007, n. 202; disponibile sul sito www.loescher.it/competenze) i giovani possono acquisire le competenze chiave di cittadinanza attraverso le conoscenze e le abilità riferite a competenze di base che sono ricondotte a 4 diversi assi culturali. La loro genesi è estremamente interessante: il primato va dunque alle competenze chiave di cittadinanza, rispetto alle quali le competenze di base costituiscono una sorta di precondizione. Risulta di estremo interesse, appunto, che l'obiettivo condiviso sia quello di dotare ragazzi e ragazze di quelle competenze che risultano essenziali a esercitare il ruolo di cittadini in senso pieno e attivo. Le competenze di base articolate nei 4 assi culturali sono allora gli "strumenti" attraverso i quali essi possono costruire la propria cittadinanza e il proprio futuro.

Nello specifico, le 8 competenze chiave di cittadinanza che tutti gli studenti devono acquisire entro i 16 anni di età, vale a dire entro la fine dell'obbligo scolastico, sono:

1. *imparare ad imparare*: ogni giovane deve acquisire un proprio metodo di studio e di lavoro;
2. *progettare*: ogni giovane deve essere capace di utilizzare le conoscenze apprese per darsi obiettivi significativi e realistici. Questo richiede la capacità di individuare priorità, valutare i vincoli e le possibilità esistenti, definire strategie di azione, fare progetti e verificarne i risultati;
3. *comunicare*: ogni giovane deve poter comprendere messaggi di genere e complessità diversi nella varie forme comunicative e deve poter comunicare in modo efficace utilizzando i diversi linguaggi;
4. *collaborare e partecipare*: ogni giovane deve saper interagire con gli altri comprendendone i diversi punti di vista;
5. *agire in modo autonomo e responsabile*: ogni giovane deve saper riconoscere il valore delle regole e della responsabilità personale;
6. *risolvere problemi*: ogni giovane deve saper affrontare situazioni problematiche e saper contribuire a risolverle;
7. *individuare collegamenti e relazioni*: ogni giovane deve possedere strumenti che gli permettano di affrontare la complessità del vivere nella società globale del nostro tempo;
8. *acquisire e interpretare l'informazione*: ogni giovane deve poter acquisire ed interpretare criticamente ogni informazione ricevuta valutandone l'attendibilità e l'utilità, distinguendo fatti e opinioni.

Queste 8 competenze non possono essere acquisite in modo prescrittivo, ovvero con la semplice enunciazione, secondo una modalità molto spesso diffusa nei nostri sistemi di istruzione e formazione. Portiamone un esempio relativo alla prima competenza. Quanti genitori si sono sentiti dire: "Suo/a figlio/a non possiede un metodo di studio", quasi che il metodo di studio fosse qualcosa che si ha o non si ha, una sorta di dotazione genetica? Quanti ragazzi si sono sentiti altresì dire: "Bisogna essere responsabili delle proprie azioni"? Il Ministero della Pubblica Istruzione, nell'estendere il Regolamento sull'obbligo di istruzione, ha allora formulato l'idea, degna di interesse e adesione, che le 8 competenze di cittadinanza possano essere acquisite attraverso le attività che consentono di assimilare le 16 competenze di base. discorso Per fare un esempio chiarificatore, è evidente che le competenze dell'asse matematico coopereranno, tra l'altro, all'acquisizione della competenza legata al *problem solving*, per la quale saranno importanti anche alcune competenze dell'asse linguistico.

Competenze chiave per l'apprendimento permanente

Fondamentale risulta, a questo proposito, la raccomandazione denominata *Competenze chiave per l'apprendimento permanente* emanata il 18 dicembre 2006 dal Parlamento Europeo e dal Consiglio dell'Unione Europea (e sostanzialmente recepita in Italia dal Regolamento citato nel testo relativo all'obbligo di istruzione; disponibile sul sito www.loescher.it/competenze). Con questa raccomandazione si richiede a ogni sistema di istruzione e formazione, degli Stati membri di «offrire a tutti i giovani gli strumenti per sviluppare le competenze chiave a un livello tale che li prepari alla vita adulta e costituisca la base per ulteriori occasioni di apprendimento, come anche per la vita lavorativa. Le competenze chiave sono quelle di cui tutti hanno bisogno per la realizzazione e lo sviluppo personali, la cittadinanza attiva, l'inclusione sociale e l'occupazione».
In questo fondamentale documento dell'Unione Europea vengono individuate 8 competenze chiave che risultano un po' differenti dalle 8 competenze di cittadinanza italiane, proprio per il collegamento esplicito di queste ultime con le competenze di base articolate nei 4 assi culturali. Le competenze chiave proposte dall'Unione Europea sono: comunicazione nella madrelingua, comunicazione in lingue straniere, competenza matematica e competenze di base in campo scientifico e tecnologico, competenza digitale, imparare a imparare, competenze sociali e civiche, senso di iniziativa e imprenditorialità, consapevolezza ed espressione culturale.

Dopo la *Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio sulle Competenze chiave per l'apprendimento permanente* del 18 dicembre 2006 il sistema dell'istruzione italiana ha accelerato il suo processo di cambiamento e di adeguamento alle necessità della società europea contemporanea. Tra le principali innovazioni introdotte si segnala appunto la centralità del concetto di competenza. Così, dopo gli importanti interventi realizzati per l'educazione degli adulti (*Linee guida per l'attuazione, nel sistema di istruzione, dell'Accordo sancito dalla Conferenza unificata il 2 marzo 2000* – D.M. 6 febbraio 2001, n. 22 sul Sistema Formativo Integrato; disponibile sul sito www.loescher.it/competenze) il Ministero è tornato a parlare di certificazione delle competenze e di riconoscimenti dei crediti. Il primo elemento assolutamente nuovo riguarda l'introduzione dell'obbligatorietà delle certificazione delle competenze alla fine della scuola secondaria di primo grado.

4. Le competenze e le Indicazioni nazionali

Nel mese di settembre del 2012 sono state pubblicate le *Indicazioni nazionali per il curricolo per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo dell'istruzione*, nelle quali sono definite le finalità del processo formativo, le competenze da sviluppare, gli obiettivi di apprendimento. Ad esempio, a proposito dei bambini che frequentano la scuola dell'infanzia si legge:

> Acquisire competenze significa giocare, muoversi, manipolare, curiosare, domandare, imparare a riflettere sull'esperienza attraverso l'esplorazione, l'osservazione e il confronto tra proprietà, quantità, caratteristiche, fatti; significa ascoltare, e comprendere, narrazioni e discorsi, raccontare e rievocare azioni ed esperienze e tradurle in tracce personali e condivise; essere in grado di descrivere, rappresentare e immaginare, "ripetere", con simulazioni e giochi di ruolo, situazioni ed eventi con linguaggi diversi.

Risulta fondamentale comprendere come la modalità didattica adottata nella scuola dell'infanzia possa costituire un esempio per i gradi successivi di scolarità relativamente alla centratura sul bambino, alla valorizzazione della sua esperienza, all'utilizzo dell'esperienza medesima come fattore di sviluppo di competenze e come la rilettura in termini di competenze della scuola dell'infanzia la collochi in una dimensione complessiva non scollegata dalla scuola primaria e dalla secondaria di primo grado.
Nella sezione riguardante l'organizzazione del curricolo è fortemente ribadita la centralità di ciascun alunno e non quella dei contenuti disciplinari:

> Fin dalla scuola dell'infanzia, nella scuola primaria e nella scuola secondaria di primo grado l'attività didattica è orientata alla qualità dell'apprendimento di ciascun alunno e non ad una sequenza lineare, e necessariamente incompleta, di contenuti disciplinari.

A proposito della scuola secondaria del primo ciclo (scuola primaria e scuola secondaria di primo grado) troviamo ribadita l'importante premessa circa il ruolo delle discipline: "La valorizzazione delle discipline avviene pienamente quando si evitano due rischi: sul piano culturale, quello della frammentazione dei saperi, sul piano didattico, quello dell'impostazione trasmissiva". La finalità del primo ciclo è quella di "facilitare l'acquisizione delle conoscenze e delle abilità fondamentali per sviluppare le competenze culturali di base nella prospettiva del pieno sviluppo della persona". In particolare nella scuola secondaria di primo grado viene favorito lo sviluppo di competenze anche all'interno delle singole discipline, ma con l'attenzione ad evitare che esse diventino compartimenti: "Le discipline non vanno presentate come territori da proteggere definendo confini rigidi, ma come chiavi interpretative disponibili ad ogni possibile utilizzazione". Occorre allora ricordare che:

> Le competenze sviluppate nell'ambito delle singole discipline concorrono a loro volta alla promozione di competenze più ampie e trasversali, che rappresentano una condizione essenziale per la piena realizzazione personale e per la partecipazione attiva alla vita sociale, nella misura in cui sono orientate ai valori della convivenza civile e del bene comune. Le competenze per l'esercizio della cittadinanza attiva sono promosse continuamente nell'ambito di tutte le attività di apprendimento, utilizzando e finalizzando opportunamente i contributi che ciascuna disciplina può offrire.

Il ruolo di un apprendimento attivo, centrato sulla strutturazione di situazioni e contesti, condizioni e disponibilità di strumenti per uno sviluppo autonomo, viene chiaramente definito per la scuola del primo ciclo: "Fin dai primi anni la scuola promuove un *percorso di attività* nel quale ogni alunno possa assumere un ruolo attivo nel proprio apprendimento, sviluppare al meglio le inclinazioni, esprimere la curiosità, riconoscere ed intervenire sulle difficoltà, assumere sempre maggiore consapevolezza di sé, avviarsi a costruire un proprio progetto di vita". Si ricorda allora di fornire a ciascun alunno le "occasioni per acquisire consapevolezza delle sue potenzialità e risorse" e di progettare per gli stessi alunni "esperienze significative". La scuola ha infatti un ruolo di "preparazione alle scelte decisive della vita".

Nella parte delle *Indicazioni nazionali* dedicata all'introduzione complessiva al primo ciclo, si trova un paragrafo denominato *L'ambiente di apprendimento* nel quale si sottolinea la necessità di un ambiente in grado di promuovere apprendimenti significativi e di "garantire il successo formativo per tutti gli alunni." A questo fine vengono indicati alcuni principi metodologici che si ritiene opportuno richiamare in forma sintetica e rielaborata in un quadro di facile lettura.

Principi metodologici per il successo formativo

Principi metodologici	Ovvero ...
Uso flessibile degli spazi	Organizzare e sfruttare l'aula scolastica come un ambiente flessibile e modificabile, non rigido. Utilizzare il più possibile gli spazi laboratoriali, tecnici, all'aria aperta, le aule informatiche, la biblioteca, eventuali spazi teatrali (o usarne altri come tali), aule musicali ecc. Variare e alternare gli spazi utilizzati.
Valorizzare l'esperienza e le conoscenze degli alunni	Valorizzare ciò che sono e ciò che sanno e sanno fare gli alunni non è soltanto una strategia "furba" per coinvolgerli e ottenere la loro adesione, è piuttosto una precondizione essenziale all'apprendimento e garantisce innovazione continua anche per l'insegnante: ciascun alunno rappresenta una risorsa. Oggi le esperienze e conoscenze acquisite in contesti non scolastici possono essere molto ricche. Attraverso le nuove tecnologie di informazione e comunicazione, gli alunni mettono in gioco, sentimenti, emozioni, attese, informazioni, abilità, modalità di apprendimento di cui vanno favoriti l'espressione, l'esplorazione, la problematizzazione e il recupero valorizzante.
Attuare interventi adeguati nei riguardi delle diversità	Evitare che le diversità si trasformino in disuguaglianze. Le differenze nei modi, tempi e livelli di apprendimento, le inclinazioni e gli interessi personali, le singole modalità di vivere emozioni e affetti devono essere inclusi e valorizzati attraverso specifici percorsi didattici che rispondano ai diversi bisogni educativi. Tra questi bisogni va sottolineato il bisogno per tutti e in particolare per gli alunni di cittadinanza non italiana, di una adeguata padronanza della lingua per avviare il proprio apprendimento e per comunicare efficacemente. Tuttavia la progettazione didattica complessiva della scuola deve favorire il dialogo tra culture. Analoga progettualità deve essere messa in campo per gli studenti con disabilità.
Favorire l'esplorazione e la scoperta	Favorire la passione per l'apprendimento attraverso esperienze che consentano di sperimentare il gusto della ricerca, della scoperta, della problematizzazione. Individuare problemi, fare domande, mettere in discussione quanto già si conosce aiuta a percorrere itinerari originali, a costruire piste personali e collettive d'indagine, ad appropriarsi del proprio itinerario apprenditivo.
Incoraggiare l'apprendimento collaborativo	Incoraggiare aiuto reciproco, apprendimento tra pari, apprendimento collaborativo al fine di incrementare i livelli di apprendimento e, al contempo, valorizzare le eccellenze e ridurre i gap. L'apprendimento non è soltanto questione individuale e la costruzione di gruppi di lavoro (interclasse, con alunni di età differenti, con composizione eterogenea) che utilizzino anche le nuove tecnologie per costruire nuove conoscenze, per fare ricerca, per stabilire contatti e corrispondere con coetanei di differenti paesi, costituisce una vera e propria risorsa, oggi essenziale, all'apprendimento.

Principi metodologici	Ovvero ...
Promuovere la consapevolezza del proprio modo di apprendere	"Imparare a imparare" è una delle competenze più importanti e, in contesto di apprendimento, è la metacompetenza per eccellenza, regolativa di tutte le altre. Richiamata con forza sia nelle competenze chiave europee che nelle competenze di cittadinanza italiane essa deve essere promossa in ogni ordine e grado di istruzione. La conoscenza delle proprie difficoltà, dei propri insuccessi ed errori, delle strategie utilizzate per superarli, dei propri punti di forza, supportano ciascun alunno nel riconoscere la propria peculiare modalità di apprendere e lo rendono capace di sviluppare una progressiva autonomia nello studio e, poi, nel lavoro. Impegnare ogni allievo nella costruzione attiva del proprio sapere è precondizione dell'apprendimento significativo.
Realizzare attività didattiche in forma di laboratorio	Promuovere forme laboratoriali di didattica (interne ed esterne alla scuola) che favoriscano il dialogo, la riflessione e l'operatività rispetto a quanto si va apprendendo, coinvolgano efficacemente gli alunni nel pensare, realizzare, valutare attività vissute in modo condiviso e partecipato con gli altri.

Le competenze raggiunte vengono certificate sia al termine della scuola primaria sia dopo l'esame conclusivo della scuola secondaria di primo grado. Se si pone attenzione a quanto espresso nelle *Indicazioni nazionali* citate, le due certificazioni del primo ciclo hanno valore eminentemente formativo:

> "Solo a seguito di una regolare osservazione, documentazione e valutazione delle competenze è possibile la loro certificazione, al temine della scuola primaria e della scuola secondaria di primo grado, attraverso i modelli che verranno adottati a livello nazionale. Le certificazioni nel primo ciclo *descrivono e attestano la padronanza delle competenze progressivamente acquisite, sostenendo e orientando gli studenti* verso la scuola del secondo ciclo".

Il lavoro continua, infatti, nel biennio della scuola secondaria di secondo grado, fino a 16 anni, alla conclusione dei dieci anni dell'obbligo di istruzione (obbligo che è di tipo anagrafico e che individua come obiettivo prioritario proprio il conseguimento delle 16 competenze di base). A questa età gli alunni e le loro famiglie possono ottenere, su richiesta, un'ulteriore certificazione delle competenze, che è comunque rilasciata obbligatoriamente al compimento della maggiore età (D.M. 139/2007; disponibile sul sito www.loescher.it/competenze).

Le competenze di base, come già anticipato, sono organizzate in assi culturali. Gli assi culturali sono 4 e precisamente:
- Asse dei linguaggi
- Asse matematico
- Asse scientifico-tecnologico
- Asse storico-sociale.

I 4 assi culturali

Asse dei linguaggi Prevede come primo obiettivo la padronanza della lingua italiana, come capacità di gestire la comunicazione orale, leggere, comprendere e interpretare testi di vario tipo e di produrre lavori scritti con molteplici finalità. Riguarda inoltre la conoscenza di almeno una lingua straniera, la capacità di fruire del patrimonio artistico e letterario, l'utilizzo delle tecnologie della comunicazione e dell'informazione. L'asse prevede il conseguimento di 6 competenze di base a conclusione dell'obbligo di istruzione: padroneggiare gli strumenti espressivi e argomentativi indispensabili per gestire l'interazione comunicativa verbale in vari contesti; leggere, comprendere ed interpretare testi scritti di vario tipo; produrre testi di varia tipologia in relazione ai differenti scopi comunicativi; utilizzare una lingua straniera per i principali scopi comunicativi e operativi; utilizzare gli strumenti fondamentali per una fruizione consapevole del patrimonio artistico e letterario; utilizzare e produrre testi multimediali.

Asse matematico Riguarda la capacità di utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico, di confrontare e analizzare figure geometriche, di individuare e risolvere problemi e di analizzare dati e interpretarli, sviluppando deduzioni e ragionamenti. Le competenze di base a conclusione dell'obbligo dell'istruzione sono, in questo caso, 4: utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico e algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica; confrontare e analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni; individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi; analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico.

Asse scientifico-tecnologico Riguarda metodi, concetti e atteggiamenti indispensabili per porsi domande, osservare e comprendere il mondo naturale e quello delle attività umane e contribuire al loro sviluppo nel rispetto dell'ambiente e della persona. In questo campo assumono particolare rilievo l'esperienza e l'attività di laboratorio.
Le competenze obiettivo sono, per quest'asse, 3 e cioè: osservare, descrivere ed analizzare fenomeni appartenenti alla realtà naturale ed artificiale e riconoscere nelle loro varie forme i concetti di sistema e di complessità; analizzare qualitativamente e quantitativamente fenomeni legati alle trasformazioni di energia a partire dall'esperienza; essere consapevole delle potenzialità delle tecnologie rispetto al contesto culturale e sociale in cui vengono applicate.

Asse storico-sociale Riguarda la capacità di percepire gli eventi storici a livello locale, nazionale, europeo e mondiale, cogliendone le connessioni con i fenomeni sociali ed economici, nonché l'esercizio della partecipazione responsabile alla vita sociale nel rispetto dei valori dell'inclusione e dell'integrazione.
Le competenze obiettivo sono 3: comprendere il cambiamento e la diversità dei tempi storici in una dimensione diacronica, attraverso il confronto tra epoche e in una dimensione sincronica attraverso il confronto tra aree geografiche e culturali; collocare l'esperienza personale in un sistema di regole fondato sul reciproco riconoscimento dei diritti garantiti dalla Costituzione, a tutela della persona, della collettività, dell'ambiente; orientarsi nel tessuto produttivo del proprio territorio.
Nella scuola secondaria di primo grado si possono utilmente incrociare le competenze di base con le competenze obiettivo definite nel *Profilo delle competenze al termine del primo ciclo di istruzione*, che sintetizza gli obiettivi relativi a ciascuna area disciplinare o disciplina. Così facendo risulterà chiaro quali siano gli obiettivi di apprendimento che ogni insegnante deve impegnarsi a perseguire, vale a dire, è bene ribadirlo, gli apprendimenti dei propri alunni.

5. L'asse matematico

L'asse matematico ha l'obiettivo di far acquisire allo studente competenze che, tradotte in concreto, permettano di esercitare adeguate capacità di giudizio, per potersi "muovere" nel mondo contemporaneo. L'applicazione di principi e processi matematici di base al contesto quotidiano, nella vita privata e nel lavoro, la capacità di valutare le proprie e le altrui argomentazioni logiche, la decisionalità e i processi di "scoperta" sono aree in cui le competenze sviluppate nell'asse matematico risultano preziose.

La competenza relativa all'area matematica, come viene ricordato dalla regolamentazione dell'obbligo di istruzione non si esaurisce: "nel sapere disciplinare e neppure riguarda soltanto gli ambiti operativi di riferimento, consiste nell'abilità di individuare e applicare le procedure che consentono di esprimere e affrontare situazioni problematiche attraverso linguaggi formalizzati" (D. M. 139 del 22 agosto 2007 e regolamento relativo).

Quali sono le competenze obiettivo dell'asse matematico secondo il D.M. 139 relativo all'assolvimento dell'obbligo di istruzione attraverso il conseguimento delle 16 competenze di base? Come abbiamo avuto modo di vedere sono 4 e più precisamente:

- utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico e algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica;
- confrontare e analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni;
- individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi;
- analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico.

A queste competenze il Regolamento fa corrispondere abilità e conoscenze che ne consentono, ma non garantiscono, lo sviluppo. Eccone un quadro riassuntivo.

Competenza obiettivo	Abilità	Conoscenze
Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico e algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica.	Comprendere il significato logico-operativo di numeri appartenenti ai diversi sistemi numerici. Utilizzare le diverse notazioni e saper convertire da una all'altra (da frazioni a decimali, da frazioni apparenti ad interi, da percentuali a frazioni ecc.)	Gli insiemi numerici N, Z, Q, R; rappresentazioni, operazioni, ordinamento.
	Comprendere il significato di potenza; calcolare potenze e applicarne la proprietà.	I sistemi di numerazione.
	Risolvere brevi espressioni nei diversi sistemi numerici; rappresentare la soluzione di un problema con un'espressione e calcolarne il valore, anche utilizzando una calcolatrice.	Espressioni algebriche principali operazioni. Equazioni e disequazioni di primo grado.
	Tradurre brevi istruzioni in sequenze simboliche (anche con tabelle); risolvere sequenze di operazioni e problemi sostituendo alle variabili letterali i valori numerici.	Sistemi di equazioni e disequazioni di primo grado.
	Comprendere il significato logico-operativo di rapporto e grandezza derivata; impostare uguaglianze di rapporti per risolvere problemi di proporzionalità e percentuale. Risolvere semplici problemi diretti e inversi.	
	Risolvere equazioni di primo grado e verificare la correttezza dei procedimenti utilizzati.	

Competenza obiettivo	Abilità	Conoscenze
	Rappresentare graficamente equazioni di primo grado; comprendere il concetto di equazione e quello di funzione.	
	Risolvere sistemi di equazioni di primo grado seguendo istruzioni e verificare la correttezza dei risultati.	
Confrontare e analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.	Riconoscere i principali enti, figure e luoghi geometrici e descriverli con linguaggio naturale.	Gli enti fondamentali della geometria e il significato dei termini: assioma, teorema, definizione.
	Individuare le proprietà essenziali delle figure e riconoscerle in situazioni concrete.	Il piano euclideo: relazioni tra rette; congruenza di figure; poligoni e loro proprietà.
	Disegnare figure geometriche con semplici tecniche grafiche e operative.	Circonferenza e cerchio.
	Applicare le principali formule relative alla retta e alle figure geometriche sul piano cartesiano.	Misura di grandezze; grandezze incommensurabili; perimetro e area dei poligoni. Teoremi di Euclide e di Pitagora.
		Teorema di Talete e sue conseguenze.
	In casi reali di facile applicabilità risolvere problemi di tipo geometrico, e ripercorrerne le procedure di soluzione.	Il metodo delle coordinate: il piano cartesiano.
		Interpretazione geometrica dei sistemi di equazioni.
	Comprendere i principali passaggi logici di una dimostrazione.	Trasformazioni geometriche elementari e loro invarianti.
Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi.	Progettare un percorso risolutivo strutturato in tappe.	Le fasi risolutive di un problema e loro rappresentazioni con diagrammi.
		Principali rappresentazioni di un oggetto matematico.
		Tecniche risolutive di un problema che utilizzino frazioni, proporzioni, percentuali, formule geometriche, equazioni e disequazioni di primo grado.
	Formalizzare il percorso di soluzione di un problema attraverso modelli algebrici e grafici.	Tecniche risolutive di un problema che utilizzino frazioni, proporzioni, percentuali, formule geometriche, equazioni e disequazioni di primo grado.
Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico.	Raccogliere, organizzare e rappresentare un insieme di dati.	Significato di analisi e organizzazione di dati numerici.
	Rappresentare classi di dati mediante istogrammi e diagrammi a torta.	Il piano cartesiano e il concetto di funzione.
	Leggere e interpretare tabelle e grafici in termini di corrispondenze fra elementi di due insiemi.	Funzioni di proporzionalità diretta, inversa e relativi grafici, funzione lineare.
		Incertezza di una misura e concetto di errore.

Competenza obiettivo	Abilità	Conoscenze
	Riconoscere una relazione tra variabili, in termini di proporzionalità diretta o inversa e formalizzarla attraverso una funzione matematica.	La notazione scientifica per i numeri reali. Il concetto e i metodi di approssimazione.
	Rappresentare sul piano cartesiano il grafico di una funzione.	I numeri "macchina".
	Valutare l'ordine di grandezza di un risultato.	Il concetto di approssimazione.
	Elaborare e gestire semplici calcoli attraverso un foglio elettronico.	Semplici applicazioni che consentano di creare un foglio elettronico con le forme grafiche corrispondenti.
	Elaborare e gestire un foglio elettronico per rappresentare in forma grafica i risultati dei calcoli eseguiti.	

6. Le competenze obiettivo e la loro declinazione

Occorre adesso stabilire quale relazione ci sia tra le 3 competenze obiettivo *dell'asse matematico*, le competenze di cittadinanza italiane e quelle chiave europee e quelle generali e specifiche per la matematica previste dalle più volte citate *Indicazioni nazionali*. Se infatti mettiamo in relazione queste 4 macro-aggregazioni di competenze potremmo essere ragionevolmente certi di avere chiari gli obiettivi di apprendimento per quest'area disciplinare. È necessario ricordare che, seppure in una didattica per competenze i livelli di interrelazione, scambio, dialogo e sovrapposizione siano molteplici, questo vale, in particolare, per la competenza "imparare a imparare", presente sia nelle 8 competenze di cittadinanza italiane che nelle 8 competenze chiave europee: essa riguarda la modalità con cui si apprende, e che consente di diventare "regista consapevole" del proprio apprendimento, piuttosto che ciò che si apprende o si apprende a fare.

Le competenze di cittadinanza italiane (anch'esse comprese nel D.M. 139/2007) che riguardano quest'area, e che naturalmente ricevono contributi anche dalle altre, sono:

- **risolvere problemi** in cui si fa riferimento sia alle capacità di *coping*, ovvero di fronteggiamento di situazioni, cioè ogni ragazzo/a deve essere in grado di "affrontare situazioni problematiche", sia alla vera e propria capacità di risoluzione di problemi riguardanti situazioni reali. Il testo ministeriale afferma che le "capacità di *problem solving* che, storicamente, hanno sempre costituito un indubbio vantaggio sia in termini di apprendimento che di inserimento professionale e sviluppo di carriera assumono, oggi, una valenza particolare in ragione della complessità sociale che ci troviamo a vivere e dei continui e repentini cambiamenti: anche i lavori tradizionalmente definiti come esecutivi si trovano, oggi a dover dare risposta a situazioni impreviste per le quali non è possibile aver previsto protocolli e procedure, la capacità di *problem solving* diventa, allora, strategica sia per la vita personale che professionale";
- **saper progettare** è oggi una competenza strategica, in cui si insiste sul sapersi dare obiettivi "significativi e realistici e saperli raggiungere" e in cui le competenze apprese in quest'asse risultano particolarmente utili ove occorra ponderare, suddividere i propri obiettivi in sotto-obiettivi, assegnare un termine, procedere per step. Sebbene non siano spesso consigliabili, per l'esistenza umana, modelli improntati alla razionalità assoluta, percorrere oggi "tratti di strada" è molto complesso.

Si comprende quindi la necessità del contributo dell'asse matematico allo sviluppo di questa competenza "che permette alle persone di stabilire il percorso che consente di percorrere la distanza tra una situazione data (la situazione attuale) ed una desiderata tenendo conto delle risorse e dei vincoli. Tutti abbiamo bisogno di competenze progettuali, per la vita quotidiana, per definire obiettivi e percorsi formativi e professionali, per definire le strategie, per saperne valutare il grado e le possibilità di raggiungimento".

Sono ovviamente già "comprese" nelle competenze dell'asse matematico le competenze di cittadinanza **individuare collegamenti e relazioni** e **acquisire e interpretare l'informazione** anche se non vengono esaurite in quell'asse.

Le Competenze chiave europee (2006/962/CE) che riguardano quest'area sono: la **competenza matematica di base in scienza e in tecnologia**, che riguarda: "l'abilità di sviluppare e applicare il pensiero matematico per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane. Partendo da una solida padronanza delle competenze aritmetico-matematiche, l'accento è posto sugli aspetti del processo e dell'attività, oltre che su quelli della conoscenza. La competenza matematica comporta, in misura variabile, la capacità e la disponibilità a usare modelli matematici di pensiero (pensiero logico e spaziale) e di presentazione (formule, modelli, costrutti, grafici, carte)".

Il **senso di iniziativa e imprenditorialità** viene pragmaticamente tradotto nell'asse matematico e riguarda "la capacità di una persona di tradurre le idee in azione. In ciò rientrano la creatività, l'innovazione e l'assunzione di rischi, come anche la capacità di pianificare e di gestire progetti per raggiungere obiettivi. È una competenza che aiuta gli individui, non solo nella loro vita quotidiana, nella sfera domestica e nella società, ma anche nel posto di lavoro, ad avere consapevolezza del contesto in cui operano e a poter cogliere le opportunità che si offrono ed è un punto di partenza per le abilità e le conoscenze più specifiche di cui hanno bisogno coloro che avviano o contribuiscono ad un'attività sociale o commerciale. Essa dovrebbe includere la consapevolezza dei valori etici e promuovere il buon governo".

Risulta già evidente che vi sono numerose sovrapposizioni tra le 3 fonti di competenza esaminate e che non si tratta dunque di giustapposizione quanto, piuttosto, di reciproche integrazioni e precisazioni, certo la declinazione completa consente una migliore comprensione di ogni competenza obiettivo.

Esaminando le *Indicazioni nazionali* occorre confrontarsi sia con il profilo di competenze dello studente al termine del primo ciclo di istruzione che con le competenze specifiche proposte per l'area disciplinare dalla scuola secondaria di primo grado. I traguardi per lo sviluppo di competenze vengono definiti come "riferimenti ineludibili per gli insegnanti" che "indicano piste culturali e didattiche da percorrere e aiutano a finalizzare l'azione educativa allo sviluppo integrale dell'allievo". Non si tratta dunque di "scegliere" tra una didattica per contenuti ed una didattica per competenze: "Nella scuola del primo ciclo *i traguardi costituiscono criteri per la valutazione delle competenze attese* e, nella loro scansione temporale, *sono prescrittivi*, impegnando così le istituzioni scolastiche *affinché* **ogni alunno** *possa conseguirli*, a garanzia dell'unità del sistema nazionale e della qualità del servizio." Sono gli itinerari scelti per conseguire questi traguardi e non la definizione degli obiettivi che attengono alla libertà di insegnamento: "Le scuole hanno la *libertà* e la *responsabilità* di organizzarsi e di *scegliere l'itinerario più opportuno per consentire agli studenti il miglior conseguimento dei risultati*."

In particolare l'interessante *Profilo delle competenze al termine del primo ciclo di istruzione* (delle *Indicazioni nazionali* più volte citate) sottolinea proprio i concetti di autonomia e responsabilità che abbiamo visto presenti nelle competenze di cittadinanza italiane e riassume in modo sintetico alcune delle competenze con le quali ci siamo finora confrontati. Estraendo i passaggi che riguardano quest'area di competenze possiamo affermare che, al termine del primo ciclo di istruzione (costituito dalla scuola primaria e dalla secondaria di primo grado), lo studente dovrebbe essere in grado, attraverso le conoscenze matematiche e scientifico-tecnologiche, di:

"[…] analizzare dati e fatti della realtà e di verificare l'attendibilità delle analisi quantitative e statistiche proposte da altri. Il possesso di un pensiero razionale gli consente di affrontare problemi e situazioni sulla base di elementi certi e di avere consapevolezza dei limiti delle affermazioni che riguardano questioni complesse che non si prestano a spiegazioni univoche. […] Si orienta nello spazio e nel tempo dando espressione a curiosità e ricerca di senso; […] ha buone competenze digitali, usa con consapevolezza le tecnologie della comunicazione per ricercare e analizzare dati ed informazioni attendibili da quelle che necessitano di approfondimento, di controllo e di verifica e per interagire con soggetti diversi nel mondo. […] Dimostra originalità e spirito di iniziativa. Si assume le proprie responsabilità e chiede aiuto quando si trova in difficoltà e sa fornire aiuto a chi lo chiede. È disposto ad analizzare se stesso e a misurarsi con le novità e gli imprevisti."

Quando giungiamo, nelle *Indicazioni nazionali*, alla trattazione della disciplina di matematica e degli specifici obiettivi di apprendimento per ogni ciclo, troviamo una concezione differente rispetto a quella a cui l'esperienza scolastica ci ha abituato, poiché si sofferma più sui processi e sull'utilizzo quotidiano che sulle formalizzazioni e la memorizzazione di regole: "le conoscenze matematiche contribuiscono alla formazione culturale delle persone e delle comunità, sviluppando le capacità di mettere in stretto rapporto il *pensare* e il *fare* e offrendo strumenti adatti a percepire, interpretare e collegare tra loro fenomeni naturali, concetti e artefatti costruiti dall'uomo, eventi quotidiani. In particolare, la matematica dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo, e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana; contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri."

Per quanto riguarda la matematica, la sottolineatura circa l'attivazione appare più volte nel documento, poiché "è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive."

I *traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado* comprendono in sintesi: la capacità di muoversi con sicurezza nel calcolo anche mediante numeri razionali, conoscerne le varie rappresentazioni; riconoscere e denominare le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e coglierne le relazioni; analizzare e interpretare rappresentazioni di dati per ricavarne misure di variabilità e prendere decisioni; riconoscere e risolvere problemi in vari contesti valutando le informazioni disponibili e la loro coerenza; spiegare e dar conto di un procedimento seguito; confrontare procedimenti diversi e produrre formalizzazioni che permettano di passare da un problema specifico a una classe di problemi; produrre argomentazioni in relazione alle conoscenze acquisite; sostenere con esempi adeguati le proprie argomentazioni, essere pronti a cambiare opinione sulla base di argomentazioni logiche corrette; utilizzare il linguaggio matematico cogliendone i rapporti con il linguaggio naturale; sapersi orientare con valutazioni di probabilità nelle situazioni di incertezza della vita quotidiana; avere conoscenza della relazione tra matematica e realtà ed avere maturato un atteggiamento positivo nei confronti della matematica. Oltre a queste competenze vi sono anche obiettivi di apprendimento specifici per la classe terza, che vengono articolati in 4 aree, riportate nella tabella che segue.

Matematica: obiettivi di apprendimento specifici per la classe terza della scuola secondaria di primo grado

Area	Obiettivi di apprendimento
Numeri	Eseguire addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, ordinamenti e confronti tra i numeri noti (naturali, interi, frazioni, numeri decimali), ove possibile a mente o valutando l'uso dello strumento più adatto. Dare stime approssimate per il risultato di un'operazione e la plausibilità di un calcolo.
	Rappresentare i numeri conosciuti sulla retta.
	Utilizzare scale graduate in contesti significativi per le scienze e la tecnica; utilizzare il concetto di rapporto tra numeri o misure ed esprimerlo sia nella forma decimale sia mediante frazione; utilizzare frazioni equivalenti e numeri decimali per denotare uno stesso numero razionale in diversi modi, essendo consapevole di vantaggi e svantaggi delle rappresentazioni.
	Comprendere il significato di percentuale e saperla calcolare utilizzando strategie diverse; interpretare una variazione percentuale di una quantità data.
	Individuare multipli e divisori di un numero naturale e multipli e divisori comuni a più numeri; comprendere il significato e utilità del multiplo comune più piccolo e del divisore comune più grande (in matematica e in situazioni concrete); scomporre numeri naturali in fattori primi e conoscere l'utilità di tale scomposizione.
	Conoscere e saper utilizzare le potenze, la radice quadrata (operatore inverso dell'elevamento al quadrato), dare stime della radice quadrata usando solo la moltiplicazione.
	Utilizzare la proprietà associativa e distributiva per raggruppare e semplificare le operazioni.
	Descrivere con un'espressione numerica la sequenza di operazioni che fornisce la soluzione di un problema.
	Eseguire semplici espressioni di calcolo con i numeri conosciuti, essendo consapevoli del significato delle parentesi e delle convenzioni sulla precedenza delle operazioni. Esprimere misure utilizzando anche le potenze del 10 e le cifre significative.
Spazio e figure	Riprodurre figure e disegni geometrici utilizzando adeguatamente gli strumenti (riga, goniometro, squadra, software ecc.); rappresentare punti, segmenti, figure sul piano cartesiano; riprodurre figure e disegni geometrici di base; riconoscere figure piane simili in vari contesti e riprodurre in scala una figura assegnata. Descrivere figure complesse e costruzioni geometriche al fine di comunicarle ad altri. Rappresentare oggetti e figure tridimensionali in vario modo tramite disegni sul piano. Visualizzare oggetti tridimensionali a partire da rappresentazioni bidimensionali.
	Conoscere definizioni e proprietà (angoli, assi di simmetria, diagonali ecc.) delle principali figure piane; conoscere il Teorema di Pitagora e le sue applicazioni concrete; conoscere il numero π, e alcuni modi per approssimarlo; conoscere e utilizzare le principali trasformazioni geometriche e le loro costanti.

Area	Obiettivi di apprendimento
	Determinare l'area di semplici figure scomponendole in figure elementari, ad esempio triangoli, o utilizzando le più comuni formule.
	Calcolare l'area e il volume delle figure solide più comuni e darne stime utilizzando oggetti della vita quotidiana.
Relazioni e funzioni	Interpretare, costruire e trasformare formule che contengono lettere per esprimere in forma generale le relazioni e le proprietà.
	Esprimere la relazione di proporzionalità con una uguaglianza di frazioni e viceversa.
	Usare il piano cartesiano per rappresentare relazioni e funzioni empiriche o ricavate da tabelle.
	Esplorare e risolvere problemi utilizzando equazioni di primo grado.
Dati e previsioni	Rappresentare insiemi di dati anche facendo uso di fogli elettronici. Utilizzare dati e relative distribuzioni di frequenza, frequenze relative, valori medi (moda, media aritmetica, mediana) in modo adeguato, per prendere decisioni. Saper valutare la variabilità di un insieme di dati determinandone, ad esempio il campo di variazione.
	Individuare, in situazioni semplici, gli eventi elementari assegnando ad ognuno di essi una probabilità, calcolare la probabilità di qualche evento, scomponendolo in eventi elementari. Riconoscere coppie di eventi complementari, incompatibili, indipendenti.

Di seguito si proporranno 4 percorsi con relative attività che, pur centrandosi principalmente sulle competenze di base, risulteranno utili anche per il conseguimento degli obiettivi di apprendimento e dei traguardi di competenza individuati nelle diverse fonti citate.

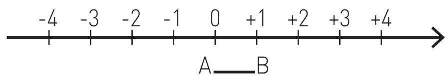
I percorsi

Percorso 1
Io e la matematica

Unità di apprendimento 1	Io e la matematica
Durata complessiva	20 ore
Collocazione	Unità da collocare all'inizio della scuola secondaria di primo grado, possibilmente nel primo anno (o all'inizio del biennio della secondaria di secondo grado)
Competenza/e obiettivo	Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico e algebrico, rappresentandole anche in forma grafica. L'unità concorre anche al raggiungimento delle seguenti competenze chiave e di cittadinanza: risolvere problemi; acquisire ed interpretare l'informazione; imparare ad imparare.

Attività	Tempi	Modalità di somministrazione
Matematica e vita quotidiana	Incontro di 2 ore	L'insegnante legge ad alta voce il brano stimolo "Le costellazioni" tratto da "*Lo strano caso del cane ucciso a mezzanotte*" di M. Haddon (Einaudi, 2003, pp. 147–148). In questo brano viene messa in luce, in maniera molto acuta e intuitiva, la differenza di percezione di un evento: la disposizione di stelle nell'universo e la nascita delle costellazioni. A conclusione della lettura del brano si facilita una discussione che verrà avviata dall'insegnante che disegnerà le immagini relative (la cintura di Orione e un dinosauro) nella lavagna a fogli mobili in due fogli distinti e mostrerà il secondo in rapida successione rispetto al primo. Dopo una breve discussione a riguardo, il conduttore proporrà il gioco dei nove punti (cfr Scheda attività 1: *Nove punti …? Unire i puntini …*) e chiederà al gruppo di provare ad unire tutti i punti utilizzando solo quattro linee rette, senza staccare mai la penna dal foglio. Nel fornire le istruzioni occorre dire di provare a unire tutti i 9 punti con sole quattro linee rette senza staccare mai la penna dal foglio, senza aggiungere altro. Il gioco viene risolto soltanto "uscendo dal quadrato" che nel disegno non c'è, nessuno lo ha nominato ma è il nostro cervello che "rintraccia" la forma del quadrato e si fossilizza su quella. Dopo aver lasciato un tempo adeguato per trovare la soluzione (e dicendo chiaramente che chi ha trovato una soluzione deve soltanto girare il proprio foglio e attendere la conclusione dell'esercizio) si spiega, appunto, che nessuno ha inserito la "regola" dello stare all'interno del quadrato. La nostra percezione, a volte, ci porta all'errore, il quadrato che "vediamo" ci condiziona a ricercare una soluzione al suo interno, mentre non c'è alcun vincolo che ci obblighi a rimanerne all'interno. I nove punti sono solo nove punti … ma la loro disposizione ci "inganna".

Attività	Tempi	Modalità di somministrazione
		Queste due attività svolte in parallelo dovrebbero stimolare una riflessione, guidata dall'insegnante, intorno alla necessità di una percezione differente della matematica e di come questa possa trovare estrema utilità nella nostra vita quotidiana. In questa fase introduttiva il cambio di percezione, o perlomeno il tentativo di vedere le cose tramite uno sguardo differente, deve assolutamente essere incentivato nel gruppo, proprio nel tentativo di scardinare o "ammorbidire" quel "blocco mentale", quella "chiusura" che spesso accompagna questa disciplina più di altre. In quest'ottica l'insegnante, a questo punto, condurrà un *brainstorming* sul perché la matematica piace o meno, riportando i risultati emersi dai ragazzi in evidenza sulla lavagna. Compito dell'insegnante, durante questa attività, non significherà tentare di "far piacere" la matematica al gruppo classe, ma far percepire ai ragazzi come questa insista inevitabilmente e quotidianamente nelle nostre vite. Sarà utile a questo fine, al termine del brainstorming, procedere con la lettura del brano stimolo "*A cosa serve la matematica*", già incontrato dall'insegnante nella parte introduttiva di questo volume. Quando si dice che il cane stesso nel contendersi l'osso con altri tre applica inconsciamente un criterio d'ordine tra insiemi di grandezze, si può stimolare la discussione del gruppo domandando: "accade sempre così, nel 100% dei casi?" Ovviamente no. Può esserci un'eccezione: il cane potrebbe decidere, se molto affamato, di rischiare, potrebbe percepirsi più veloce, più scaltro e prendersi l'osso. Questo può accadere perché la vita non ha sempre paradigmi matematici esatti che la spieghino e soluzioni semplici e immediate. La vita spesso è imprevedibile e allora si deve procedere per "probabilità" o per "approssimazione", che sono comunque entrambi concetti matematici (questi concetti verranno affrontati negli incontri futuri relativi alla quarta competenza dell'asse matematico: "*Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico*").
Fatti i calcoli tuoi …	Incontro di 2 ore	Nell'incontro successivo si darà spazio a ciascuno per fornire esempi di come effettuare calcoli mentalmente, per evidenziare le differenti strategie e sottolineare quelle che sono, soggettivamente, funzionali. L'insegnante fornirà una dimostrazione procedendo a un calcolo a mente di cui dettaglierà, ad alta voce, tutti i passaggi che farà mentalmente. Come ulteriore stimolo possono essere raccontati gli studi fatti sulla matematica di strada e sulla matematica a scuola sui bambini brasiliani riportati nell'introduzione a questo volume. Risulta importante sottolineare come non esistano strategie mentali di calcolo "giuste", ma vi sono, senza dubbio, strategie più "economiche" e strategie "meno economiche". La semplice condivisione delle strategie di calcolo che ciascuno utilizza, costituirà un importantissimo arricchimento per l'intera classe. L'insegnante sottolineerà poi gli aspetti più interessanti dei procedimenti resi noti da ciascun alunno/a.
Numeri sopra il monte o sotto l'acqua	Tre incontri di 2 ore	L'insegnante, dopo aver letto ad alta voce il brano "Tutto con uno" tratto da "*Il mago dei numeri*" (pag. 10-11), introdurrà il lavoro sugli insiemi numerici. Lo stimolo narrativo, breve, si centrerà sulla frase seguente: "*Di magico i numeri hanno che sono semplici. In fondo non ti serve nemmeno la calcolatrice. Per cominciare ti basta solo una cosa: l'uno. Puoi farci quasi tutto.*" (*Il mago dei numeri* di Enzensberger, Torino, Einaudi, 1998, p.11).

Attività	Tempi	Modalità di somministrazione
		L'insegnante coglierà l'occasione per presentare il volume e consigliarne la lettura individuale (anche fornendo alcuni esempi di passi particolarmente significativi o coinvolgenti per motivare alla lettura e incuriosire). Il volume è estremamente indicato per l'approccio semplice, ma non banale (e al contempo fantasioso e umoristico) con cui vengono trattati i concetti matematici e il loro rapporto con la nostra esperienza quotidiana di vita, riuscendo nel difficile obiettivo di "avvicinare" la matematica alla propria esistenza. Per iniziare a perseguire gli obiettivi di apprendimento specifici di questa unità sarà importante approcciare gli elementi di base costitutivi della disciplina: i numeri. La Scheda attività 2: *Insiemi numerici* può essere usata come compendio per schematizzare gli insiemi numerici alla classe, ma anche per consentire una semplificazione ad uso del docente di molti dei contenuti disciplinari fondamentali che dovranno essere fatti propri dai ragazzi al termine della classe terza della secondaria di primo ciclo. Descritte brevemente le tipologie di numeri (N, Z, Q, R) e le loro relazioni gerarchiche di insieme si centrerà l'attenzione sui numeri interi relativi (Z). La rappresentazione grafica del Monte Everest e della Fossa della Marianne (cfr Scheda illustrazione: *Monte Everest e Fossa delle Marianne*) che rappresenta i punti apicali opposti del nostro pianeta, è senz'altro una chiara esemplificazione e introduzione del gruppo dei numeri interi relativi (Z) che consentono, con l'inserimento dei numeri negativi (a segno meno), l'introduzione del concetto di sottrazione e l'applicazione quindi di tutte e quattro le operazioni aritmetiche fondamentali. L'insegnante stimolerà la classe con esempi numerici da posizionare sopra e sotto la linea dello "0". "Sopra e sotto" diventerà poi "destra e sinistra" nella classica rappresentazione grafica della retta dei numeri relativi. L'insegnante proporrà allora alcuni esercizi di "posizionamento" numerico di numeri relativi (quindi non necessariamente interi) su una retta del tipo:  e chiederà agli allievi, a piccoli gruppi, di trovare definizioni condivise, da verificare poi con l'insegnante, di cosa significhino numeri "positivi", "negativi", "concordi", "discordi", "opposti" e di "valore assoluto" (cfr. Scheda attività 3: *Le nostre definizioni*). Dopo aver introdotto le operazioni tra numeri relativi di segno opposto o di stesso segno, l'insegnante propone alla classe una scheda da risolvere con relativi calcoli aritmetici tra numeri relativi (Scheda attività 4: *Operazioni con numeri relativi*) assegnando 30 minuti di tempo per svolgerli. A seguire la classe verrà condotta in un esperimento narrativo: suddivisa dall'insegnante in sottogruppi di tre ragazzi, a ciascun gruppo verrà chiesto, in un tempo definito di circa un'ora, di inventare una storia che abbia per protagonisti i numeri appena incontrati e che descriva in termini narrativi le proprietà delle operazioni tra tali numeri. Le indicazioni sono esplicitate nella Scheda attività 5: *Raccontiamo i numeri*. All'interno del gruppo sarà scelto un relatore che restituirà l'elaborato al resto della classe, puntualizzando gli elementi matematici del racconto del proprio gruppo. Nell'incontro successivo l'insegnante proporrà di risolvere sequenze di operazioni e problemi sostituendo alle variabili letterali i valori numerici come nella Scheda attività 6: *Lettere e numeri*. Ciò sarà importante per introdurre il lavoro sulle equazioni e disequazioni.

Attività	Tempi	Modalità di somministrazione
		Dopo aver svolto queste attività si procederà alla sostituzione delle incognite e alla definizione della classe di appartenenza dei numeri dei risultati.
I numeri a base 10 e i "saltellanti"	Due incontri da 2 ore	Viene fatta una lettura introduttiva da parte dell'insegnante dal volume "*Il mago dei numeri*" di H. Enzensberger (da fine di p. 28 all'inizio di p. 40). Questo testo può costituire la narrazione guida per questa unità per la sua capacità di spiegare e raccontare in modo molto semplice argomenti complessi. Nello specifico, seguendo passo passo la narrazione, l'insegnante sceglierà un ragazzo del gruppo classe che, come il Mago dei Numeri nel racconto, traccerà (alla lavagna, anziché in cielo) i segni come dalle indicazioni date nel racconto. L'insegnante fermerà la narrazione dopo la definizione dell'età del protagonista del racconto scritta con l'utilizzo dei numeri romani. A questo punto proporrà al gruppo di definire, seguendo la stessa logica, la classe di età dei ragazzi della classe e farà scrivere direttamente alla lavagna dal proprio "*Mago dei Numeri*" (l'allievo/a alla lavagna), ciò che viene detto via via dai compagni. Ripresa la narrazione da parte dell'insegnante, sarà importante porre in risalto il valore dello zero (non conosciuto dagli antichi romani) che determina con il suo "saltellamento" la differenza tra il nostro sistema di numerazione a base 10 e quello dei nostri avi. Una volta terminata la narrazione, questa sarà servita da introduzione per esaminare l'elevazione a potenza di un numero e, conseguentemente, le proprietà matematiche delle potenze.
Una soluzione, due soluzioni ...	Due incontri da 2 ore	Avendo operato una distinzione tra i numeri naturali (N) e i numeri relativi (Z), l'insegnante dovrà chiarire molto bene alla classe la differenza tra aritmetica (che utilizza il sistema dei numeri naturali per i propri calcoli e che si limita a operare sostituzioni di variabili letterali con numeri, ma non a operazionalizzare le variabili stesse) e algebra (che invece introduce anche i numeri a segno – meno, gli Z, per i propri calcoli e operazionalizza le variabili alfanumeriche introducendo quindi il concetto di equazione e disequazione). Si sottolineerà come l'aritmetica abbia una valenza molto più vicina alla vita di tutti i giorni (quasi indispensabile alla "sopravvivenza"), mentre l'algebra abbia sì una ricaduta meno evidente e immediata nella vita di tutti i giorni, ma una componente di logica molto forte e utile in senso più trasversale. Definiti quindi questi elementi procedurali, che serviranno da cornice introduttiva per non confondere i ragazzi, l'insegnante introduce i primi semplici esempi di equazione di primo grado a 1 e a 2 incognite. Risulta indispensabile, in questo snodo cruciale, focalizzare l'attenzione e assicurarsi che la classe abbia chiaro tutto quanto svolto fino a qui e sappia intravedere gli esiti e le finalità di quello che andrà a fare. L'esperienza ci dice che è proprio nel passaggio cruciale dai problemi aritmetici a quelli algebrici che si assiste spesso allo scollamento e al blocco che moltissimi studenti nella scuola italiana provano nei confronti della matematica. Dopo alcuni esercizi di soluzione di equazioni di primo grado con passaggio da forma implicita in forma esplicita (es. $x + y - 6 = 0 \Rightarrow y = -x + 6$), l'insegnante chiederà alla classe di provare a rappresentare graficamente equazioni di primo grado proposte. Per continuare l'esempio citato: $y = -x + 6$ A) se $x = 0$ allora $y = -0 + 6 = 6$ B) se $x = 5$ allora $y = -5 + 6 = 1$

Attività	Tempi	Modalità di somministrazione
		(Nota Bene: la scelta di $x = 0$ e 5 è casuale, si può scegliere qualunque valore, anche negativo, utilizzando nel caso i quattro quadranti del piano cartesiano). Trovati quindi i punti, o le coordinate, A (0,6) e B (5,1) e disegnando la retta tra i due punti (per due punti passa una e una sola retta) ecco l'equazione riportata in forma grafica sul piano. Qualunque sia il valore che diamo alle variabili della nostra equazione il risultato sarà comunque 1 (Esempio: $x = 3 + 2y$ se dò alla y il valore di 2, allora il mio unico risultato per la x sarà 7). Per le disequazioni si parla di intervalli di valori come soluzioni. Una disequazione ha per soluzione l'intervallo o quegli intervalli di valori che, attribuiti alle incognite, rendono la disequazione effettivamente verificata. I segni che dividono le disequazioni sono difatti segni di > o < e i risultati sono o l'intervallo dei numeri reali da lì ad infinito o l'insieme vuoto se la disequazione non è confermabile (ad es. risultato $0 < -1$). Può essere utile, al termine dei calcoli, eseguire un piccolo grafico ove possa determinarsi il campo dei valori che verificano la disuguaglianza. Nel grafico, per convenzione, utilizziamo linee continue per indicare l'intervallo in cui la disequazione è soddisfatta, e linee tratteggiate per indicare l'intervallo dove la disequazione non è soddisfatta (come nell'esempio sotto). $2x - 3 > 5 - 4x$ (si spostano le x a primo membro ed i numeri a secondo membro) $2x + 4x > 5 + 3$ (si cambiano i segni nel passaggio) $6x > 8$ $x > 8/6$ (si semplifica) $x > 4/3$.
Laboratorio di informatica	Incontro da 2 ore	L'insegnante concluderà il primo percorso "Io e la matematica" in aula informatica lavorando per sottogruppi e chiedendo di impostare e testare una o più funzioni semplici su Excel. I gruppi sceglieranno liberamente il tipo di funzione di calcolo da impostare tra celle Excel collegate, ad esempio la funzione per la potenza di 2 ecc. L'insegnante verificherà poi nei vari gruppi la correttezza nell'impostazione delle funzioni-calcolo, chiedendo al gruppo di inserire vari valori nella/e cella/e di input e di verificarne le risultanze. L'insegnante mostrerà poi l'utilizzo dello strumento funzione previsto dal programma, testando l'applicazione delle funzioni di più frequente utilizzo, anche attraverso l'utilizzo degli esercizi per Excel disponibili in rete. A conclusione dell'ultimo incontro dell'Unità si mostrerà il video (durata 35 minuti) *Paperino nel mondo della Matemagica*.

Materiali

1. Scheda illustrazione: *Monte Everest e Fossa delle Marianne*
2. Scheda docente: *Insiemi numerici*
3. Volume: *Il mago dei numeri,* di H. M. Enzensberger, Einaudi, Torino, 1998.
4. Volume: *Lo strano caso del cane ucciso a mezzanotte*, di M. Haddon, Einaudi, Torino, 2003.
5. Aula informatica (per inserimento dati in Excel)
6. Video: *Paperino nel mondo della Matemagica* (Disney, 35 minuti) – disponibile su youtube

BRANI STIMOLO

1. *Le costellazioni* da "*Lo strano caso del cane ucciso a mezzanotte*", di M. Haddon, Einaudfi, Torino, 2003, pp. 147-148
2. *A cosa serve la matematica*
3. *Tutto con uno* da "*Il mago dei numeri*", di H. M. Enzensberger, Einaudi, Torino, 1998, p. 11.

SCHEDE ATTIVITÀ

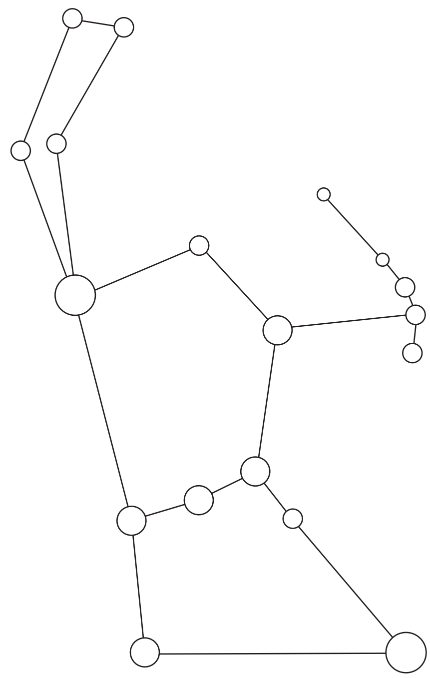
1. *Nove punti ... ? Unire i puntini ...*
2. *Insiemi numerici*
3. *Le nostre definizioni*
4. *Operazioni con numeri relativi*
5. *Raccontiamo i numeri*
6. *Lettere e numeri*

Alunno .... classe .... data ....

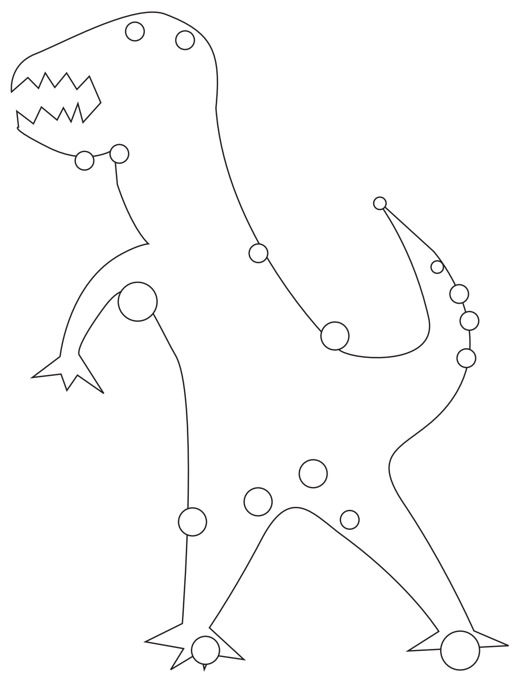
1. Le costellazioni

"Nell'angolo di cielo fra il tetto del capanno e il grande albero che sovrasta lo steccato della casa vicina vidi la costellazione di **Orione**.

Si dice che **Orione** si chiami così perché Orione era il nome di un cacciatore e la costellazione ha la forma di un cacciatore con un bastone e l'arco e le frecce, come in questo disegno



Ma è una cosa davvero stupida perché si tratta solo di stelle, e si potrebbero unire i puntini a piacimento, e allora potrebbe assomigliare a una signora con l'ombrello che saluta con la mano, o alla caffettiera della signora Shears, che viene dall'Italia, con una maniglia e il vapore che esce, oppure a un dinosauro



E non ci sono linee nello spazio, quindi si potrebbero unire dei pezzi di Orione con quelli della costellazione della Lepre o del Toro o dei Gemelli e dire che il nome della costellazione è **Il Grappolo d'Uva** o **Gesù** o **La Bicicletta** (solo che non c'erano le biciclette ai tempi dei Romani e dei Greci che è quando chiamarono **Orione** Orione).

E comunque, Orione non è un cacciatore né una caffettiera o un dinosauro. É solo Betelgeuse e Bellatrix e Alnilam e Rigel e 17 altre stelle di cui non conosco il nome. E sono esplosioni nucleari lontane milioni e milioni di chilometri.

E questa è la verità."

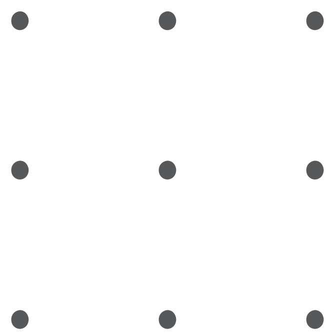
(*Lo strano caso del cane ucciso a mezzanotte*, M. Haddon, Einaudi, Torino, 2003, pp. 147-148)

Alunno .... classe .... data ....

Scheda attività 1

Nove punti ... ? Unire i puntini ...

Con soli quattro segmenti retti, senza mai staccare la penna dal foglio, prova a toccare tutti i puntini.



Alunno .... classe .... data ....

2. A cosa serve la matematica?

Molti si domandano a cosa serve la matematica. Circola da tempo una breve storia, di cui esistono innumerevoli versioni, che cerca di affrontare questa spinosa domanda.
Il modo corretto di porsi questa domanda forse è: vi sono settori della vita quotidiana in cui la matematica non serve?

Sono moltissimi i testi nei quali si è cercato di evidenziare la relazione tra matematica e vita quotidiana. La storia a cui facciamo riferimento mostra un paradosso, ovvero mostra come, in un certo senso, anche gli animali utilizzino la matematica. L'idea sottesa a questa storia è che la matematica ci serva sempre, che sia essenziale alla stessa sopravvivenza.

Un giorno un cane vide un osso. Mentre si stava avvicinando per portarselo via, vide avvicinarsi altri tre cani. A quel punto il cane solitario decise di rinunciare a impossessarsi dell'osso. Potremmo dire che il cane abbia usato, in modo ingenuo, il concetto di numero? In effetti la sua valutazione è stata che confrontandosi contro tre cani non avrebbe potuto ottenere nulla.

Forse si potrebbe obiettare che il cane non ha contato, ma ha solo valutato che gli altri cani erano molti e lui da solo. Se così fosse avrebbe comunque fatto una valutazione in termini di maggiore/minore, cioè avrebbe stabilito una relazione d'ordine, una valutazione di "peso". In realtà dovrebbe anche aver stimato una relazione tra forze, in quanto deve aver stabilito che la somma della forza di tre cani è maggiore della sua propria forza solitaria.

Come facciamo ad asserire una cosa come questa? Se proviamo a sostituire ai tre cani tre mosche che si avvicinano all'osso, non penseremmo certo che il cane se ne vada con la coda tra le gambe … eppure, anche in questo caso, la relazione numerica lo metterebbe in situazione di svantaggio. Il cane, tuttavia, come apprendiamo dall'esperienza, si prende l'osso senza timore. Che tipo di "considerazione" avrà fatto? In un certo senso potremmo dire che ha valutato che se anche la relazione in termini numerici lo poneva in svantaggio, la relazione di forze, invece, lo poneva in una situazione di vantaggio: la forza di un cane è nettamente superiore alla forza di tre mosche. In qualche senso dovrebbe anche aver ritenuto prioritaria la relazione di forze rispetto a quella numerica per compiere la scelta di prendersi l'osso e andarsene tranquillamente.

Il mondo animale e il mondo degli uomini sarebbero dunque organizzati attraverso il principio dei numeri e attraverso il principio delle forze. A parità di "peso" delle forze prevale il principio numerico, mentre se esiste una disparità di "peso" a prevalere è il principio delle forze.

In conclusione potremmo rispondere alla domanda dicendo che la matematica è essenziale alla sopravvivenza.

3. Tutto con uno

È qui che ti voglio, mio caro, rispose il vecchio. Di magico i numeri hanno che sono semplici. In fondo non ti serve nemmeno la calcolatrice. Per cominciare ti basta una sola cosa: l'uno. Puoi farci quasi tutto. Se ad esempio i numeri grandi ti fanno paura, diciamo ad esempio cinquemilionisettecentoventitremilaottocentododici, allora comincia così:

1+1
1+1+1
1+1+1+1
1+1+1+1+1
…

Alunno .... classe .... data ....

e poi prosegui, fino a cinquemilionieccetera. Non mi dirai che è troppo complicato! Ci arriva anche un cretino. O no?

– Beh, sì, rispose Roberto.

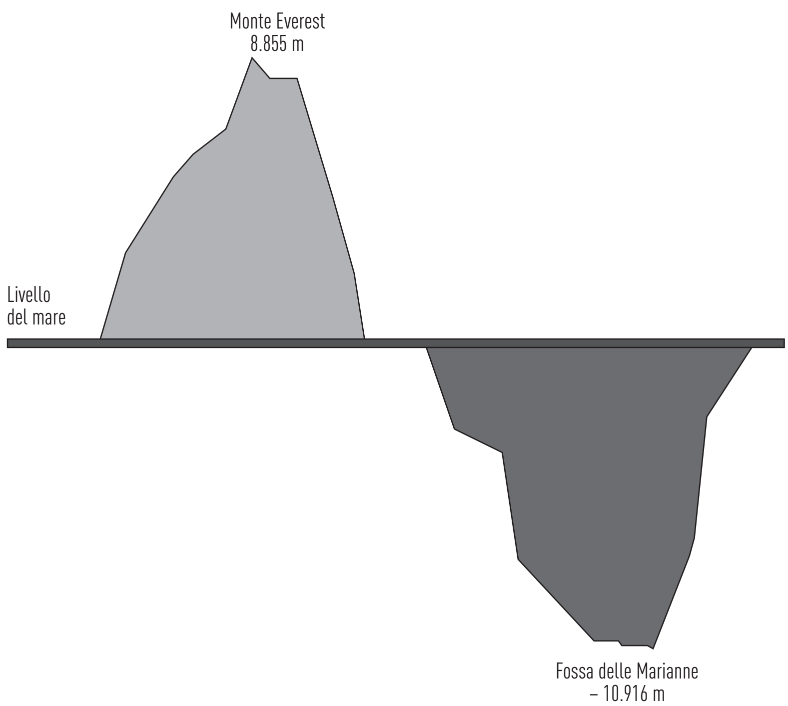
– E non è tutto, proseguì il mago. In mano adesso reggeva un bastone da passeggio col pomello d'argento che agitava davanti al naso di Roberto.

– Quando arrivi a cinquemilionieccetera continui a contare. Vedrai che puoi andare avanti all'infinito. Perché i numeri sono infiniti.

(H. M. Enzensberger, *Il mago dei numeri,* Einaudi, Torino, 1998, p. 11)

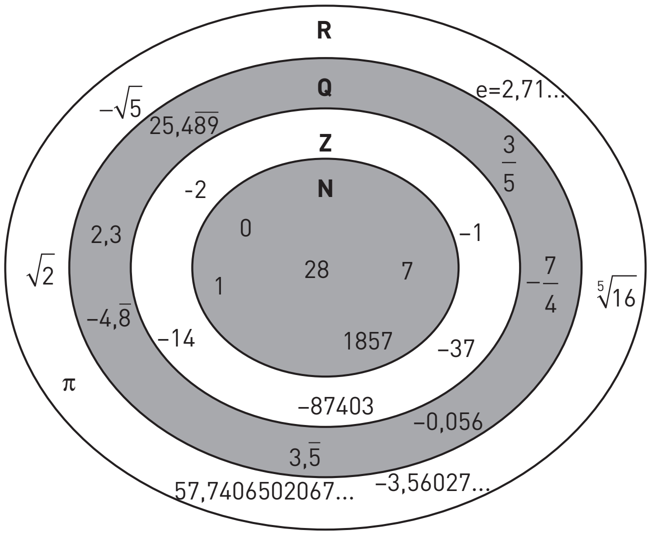
Scheda illustrazione

Monte Everest e Fossa delle Marianne



Alunno .... classe .... data ....

Scheda attività 2
Insiemi numerici



R = **Numeri Reali**

Q = **Numeri Razionali**

Z = **Numeri Interi Relativi**

N = **Numeri Naturali**

Dal diagramma di Eulero-Venn ovvio è che **N** è un sottoinsieme proprio di **Z**, **Z** è un sottoinsieme proprio di **Q**, **Q** è un sottoinsieme proprio di **R**.
I numeri **Naturali** sono tutti i numeri interi positivi, **N** = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, . . ,+∞}. Nell'insieme dei numeri Naturali si possono eseguire le operazioni di: addizione, moltiplicazione e potenza.
I numeri **Interi Relativi** sono tutti i numeri interi positivi e negativi, **Z** = {-∞, . . . –2, –1, 0, 1, 2, . . . +∞}. Nell'insieme dei numeri Interi Relativi, oltre all'addizione, alla moltiplicazione e alla potenza, si può eseguire anche la sottrazione.
I numeri **Razionali Q**, sono tutti i numeri, positivi e negativi, che si possono mettere sotto forma di frazione, e cioè tutti i numeri interi, tutti i numeri decimali limitati, tutti i numeri decimali illimitati periodici e tutte le frazioni.
Nell'insieme dei numeri razionali, oltre all'addizione, alla sottrazione, alla moltiplicazione e alla potenza, si può eseguire anche la divisione. I numeri **Irrazionali I**, sono tutti i numeri che non si possono mettere sotto forma di frazione, e cioè i numeri decimali illimitati non periodici.
I numeri **Reali R**, sono tutti i numeri razionali e irrazionali. Nell'insieme dei numeri reali, oltre alle operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione e potenza, si può eseguire anche l'estrazione di radice n-esima di qualsiasi numero positivo.

Alunno .... classe .... data ....

Scheda docente

Insieme numerici

I NUMERI NATURALI

La tabellina

1 × 1 = 1	1 × 2 = 2	1 × 3 = 3	1 × 4 = 4	1 × 5 = 5	1 × 6 = 6	1 × 7 = 7	1 × 8 = 8	1 × 9 = 9	1 × 10 = 10
2 × 1 = 2	2 × 2 = 4	2 × 3 = 6	2 × 4 = 8	2 × 5 = 10	2 × 6 = 12	2 × 7 = 14	2 × 8 =16	2 × 9 = 18	2 × 10 = 20
3 × 1 = 3	3 × 2 = 6	3 × 3 = 9	3 × 4 = 12	3 × 5 = 15	3 × 6 = 18	3 × 7 = 21	3 × 8 =24	3 × 9 = 27	3 × 10 = 30
4 × 1 = 4	4 × 2 = 8	4 × 3 = 12	4 × 4 = 16	4 × 5 = 20	4 × 6 = 24	4 × 7 = 28	4 × 8 = 32	4 × 9 = 36	4 × 10 = 40
5 × 1 = 5	5 × 2 = 10	5 × 3 =15	5 × 4 = 20	5 × 5 = 25	5 × 6 = 30	5 × 7 = 35	5 × 8 = 40	5 × 9 = 45	5 × 10 = 50
6 × 1 = 6	6 × 2 = 12	6 × 3 = 18	6 × 4 = 24	6 × 5 = 30	6 × 6 = 36	6 × 7 = 42	6 × 8 = 48	6 × 9 = 54	6 × 10 = 60
7 × 1 = 7	7 × 2 = 14	7 × 3 = 21	7 × 4 = 28	7 × 5 = 35	7 × 6 = 42	7 × 7 = 49	7 × 8 = 56	7 × 9 = 63	7 × 10 = 70
8 × 1 = 8	8 × 2 =16	8 × 3 = 24	8 × 4 = 32	8 × 5 = 40	8 × 6 = 48	8 × 7 = 56	8 × 8 = 64	8 × 9 = 72	8 × 10 = 80
9 × 1 = 9	9 × 2 = 18	9 × 3 = 27	9 × 4 = 36	9 × 5 = 45	9 × 6 = 54	9 7 = 63	9 × 8 = 72	9 × 9 = 81	9 × 10 = 90
10 × 1 = 10	10 × 2 = 20	10 × 3 = 30	10 × 4 = 40	10 × 5 = 50	10 × 6 = 60	10 × 7 = 70	10 × 8 = 80	10 × 9 = 90	10 × 10 = 100

Potenza di numero naturale

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\ volte}$ $\qquad$ $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

$a^1 = a$ $\qquad$ $5^1 = 5$ $\qquad$ $7^1 = 7$ $\qquad$ $23^1 = 23$

$a^0 = 1$ $\qquad$ $5^0 = 1$ $\qquad$ $7^0 = 1$ $\qquad$ $23^0 = 1$

$0^0 = ?$ *non ha alcun significato*

Proprietà delle potenze

$a^n \cdot a^p = a^{n+p}$ $\qquad$ $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4}$

$a^n : a^p = a^{n-p}$ $\qquad$ $2^7 : 2^4 = 2^{7-4}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $\qquad$ $2^4 \cdot 3^4 = (2 \cdot 3)^4$

$a^n : b^n = (a : b)^n$ $\qquad$ $6^4 : 3^4 = (6 : 3)^4$

$(a^n)^p = a^{n \cdot p}$ $\qquad$ $(2^3)^4 = a^{3 \cdot 4}$

Criteri di divisibilità

Un numero è divisibile per **2** quando termina per cifra pari (0, 2, 4, 6, 8).

Un numero è divisibile per **3** quando il numero formato dalla somma delle sue cifre è divisibile per 3.

Un numero è divisibile per **5** quando termina per zero o per cinque.

Un numero è divisibile per **9** quando il numero formato dalla somma delle sue cifre è divisibile per 9.

Un numero è divisibile per **10** quando termina per zero.

Esempi

345674 è divisibile per *2*. *2310411* è divisibile per *3* perché *2 + 3 + 1 + 0 + 4 + 1 + 1 = 12* che è divisibile per *3*.

305685 è divisibile per *5*. *3057201* è divisibile per *9* perché *3 + 0 + 5 + 7 +2 + 0 + 1 = 18* che è divisibile per *9*.

Alunno .... classe .... data ....

Scomposizione di un numero in fattori primi
Un numero si dice **primo** quando è divisibile solo per se stesso e per 1.
Sono numeri primi, ad esempio: *2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, ...*

Per scomporre un numero in fattori primi, lo si divide per il più piccolo numero primo che sia suo divisore; si divide poi il risultato ottenuto sempre per il suo più piccolo divisore primo, e così di seguito fino ad ottenere 1.

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2\times 5 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 210 & 2\times 5 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 300 & 2\times 5 \\ 30 & 2\times 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$
$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$

Massimo comune divisore
Il M.C.D. di due o più numeri naturali si ottiene prendendo (dalla scomposizione dei numeri in fattori primi) i fattori comuni, una sola volta, con il minimo esponente.

Esempio
M.C.D. (360, 210, 300) $= 2 \times 3 \times 5 = 30$.

Minimo comune multiplo
Il m.c.m. di due o più numeri naturali si ottiene prendendo (dalla scomposizione dei numeri in fattori primi) i fattori comuni e non comuni, una sola volta, con il massimo esponente.

Esempio
m.c.m. (360, 210, 300) $= 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 12600$.

Espressioni aritmetiche
Nel risolvere le espressioni aritmetiche occorre eseguire i calcoli a partire dalle parentesi più interne (1°- tonde, 2°- quadre, 3°- graffe); l'ordine di esecuzione delle operazioni è il seguente: 1°- potenze, 2°- moltiplicazioni e divisioni, 3°- addizioni e sottrazioni.

$\{18 + 2 \times [(2^2 + 3^2 + 2 \times 4) : 7 + 5 \times (3 + 42 : 6)] - 15\} : 109 + 2 =$

$= \{18 + 2 \times [(4 + 9 + 2 \times 4) : 7 + 5 \times (3 + 7)] - 15\} : 109 + 2 =$

$= \{18 + 2 \times [(4 + 9 + 8) : 7 + 5 \times 10] - 15\} : 109 + 2 =$

$= \{18 + 2 \times [21 : 7 + 5 \times 10] - 15\} : 109 + 2 =$

$= \{18 + 2 \times [3 + 50] - 15\} : 109 + 2 =$

$= \{18 + 2 \times 53 - 15\} : 109 + 2 =$

$= \{18 + 106 - 15\} : 109 + 2 =$

$= 109 : 109 + 2 =$

$= 1 + 2 =$

$= 3$

Alunno .... classe .... data ....

NUMERI RAZIONALI ASSOLUTI

I numeri **Razionali** assoluti sono tutti i numeri positivi che si possono mettere sotto forma di frazione.
Una **frazione** è una coppia ordinata di numeri naturali, il secondo dei quali diverso da zero.

$\frac{3}{5}$ è una **frazione**, il numero 3 è detto **numeratore**, mentre il 5 è detto **denominatore**.

$\frac{7}{0}$ *non ha significato, non rappresenta alcuna frazione*

Per ridurre ai minimi termini una frazione occorre dividere il numeratore e il denominatore per il M.C.D. dei termini della frazione.

$$\frac{\cancel{28}^{4}}{\cancel{21}_{3}} = \frac{4}{3}$$

Addizione e sottrazione di frazioni

$$\frac{4}{3} - \frac{2}{5} = \frac{15 : 3 \times 4 - 15 : 5 \times 2}{\text{m.c.m. } (3, 5) = 15} = \frac{20 - 6}{15} = \frac{14}{15}$$

Moltiplicazione di frazioni

$$\frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{3}_{1}} \cdot \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{10}_{5}} = \frac{4 \times 3}{1 \times 5} = \frac{12}{5}$$

Divisione di frazioni

$$\frac{8}{3} : \frac{10}{9} = \frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{3}_{1}} \cdot \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{10}_{5}} = \frac{4 \times 3}{1 \times 5} = \frac{12}{5}$$

Potenza di una frazione

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{16}{81}$$

Trasformazione di una frazione in numero decimale

Per trasformare una frazione in numero decimale basta eseguire la divisione fra il numeratore e il denominatore.

Esempio $\frac{5}{4} = 5 : 4 = 1{,}25$

Trasformazione di un numero decimale in frazione

Un numero decimale limitato è uguale ad una frazione che ha per numeratore il numero dato preso senza la virgola, e per denominatore il numero 1 seguito da tanti zeri quante sono le cifre decimali.

Esempi $0{,}0045 = \frac{45}{10000}$ $30{,}482 = \frac{30482}{1000}$

Alunno .... classe .... data ....

Trasformazione di un numero decimale periodico in frazione
Un numero decimale illimitato periodico è uguale ad una frazione che ha per numeratore il numero dato, preso senza la virgola, diminuito del numero che precede il periodo, e come denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo, seguiti da tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo.

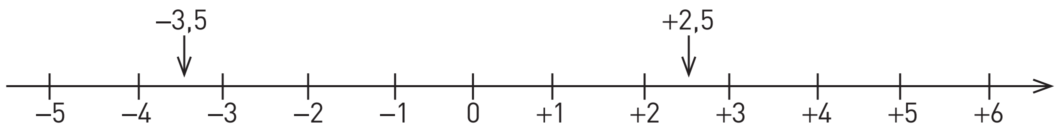
Esempi $32,\overline{57} = \dfrac{3257 - 35}{99}$ $\qquad 7,29\overline{481} = \dfrac{729481 - 729}{99900}$

Osservazione
Un numero decimale illimitato non periodico non può essere trasformato in frazione, pertanto è un numero irrazionale.

I NUMERI RELATIVI

I numeri relativi sono tutti i numeri preceduti dal segno più o dal segno meno.

Ad esempio: $+3$; -7; $+3,8$; $-\dfrac{4}{5}$; $-5,8\overline{3}$



Definizioni

Il **valore assoluto** di un numero relativo è il numero privato del segno.

Un numero si dice **positivo** se è preceduto dal segno +.
Un numero si dice **negativo** se è preceduto dal segno –.
Due numeri si dicono **concordi** se hanno lo stesso segno.
Due numeri si dicono **discordi** se hanno segno diverso.
Due numeri si dicono **opposti** quando differiscono solo per il segno.

Esempi

Il valore assoluto di +5 è 5

+7 è un numero positivo

–5 e –7 sono numeri concordi

+5,8 e –5,8 sono numeri opposti.

il valore assoluto di –5 è 5

–5 è un numero negativo

–5 e +7 sono numeri discordi

Regola per togliere le parentesi
Se una parentesi (contenente una addizione algebrica di due o più numeri) è preceduta dal segno +, la parentesi ed il segno + possono essere eliminati:

$$+(-5 + 7 - 4 + 8 - 6) = -5 + 7 - 4 + 8 - 6$$

Se una parentesi (contenente una addizione algebrica di due o più numeri) è preceduta dal segno –, la parentesi ed il segno – possono essere eliminati, ma occorre cambiare il segno ai termini dentro la parentesi:

$$-(-5 + 7 - 4 + 8 - 6) = +5 - 7 + 4 - 8 + 6$$

Alunno .... classe .... data ....

Addizione e sottrazione

La somma di due numeri concordi si ottiene sommando i numeri dati e mettendo il segno comune.

La somma di due numeri discordi si ottiene facendo la differenza dei numeri dati e mettendo il segno del numero più grande.

$+7+5=+12$ $\quad -7-5=-12$ $\quad +7-5=+2$ $\quad -7+5=-2$

Addizione e sottrazione di più numeri

La somma algebrica di più numeri relativi è uguale alla differenza fra la somma dei numeri positivi e la somma dei numeri negativi.

$$-3+7-8+5-9-4+6-2+1=(7+5+6+1)-(3+8+9+4+2)=19-26=-7$$

Moltiplicazione e divisione

Il prodotto o il quoziente di due numeri concordi è un numero positivo.

Il prodotto o il quoziente di due numeri discordi è un numero negativo.

$(+7)\times(+5)=+35$ $\quad (-7)\times(-5)=+35$ $\quad (+7)\times(-5)=-35$ $\quad (-7)\times(+5)=-35$

$(+7):(+5)=+\frac{7}{5}$ $\quad (-7):(-5)=+\frac{7}{5}$ $\quad (+7):(-5)=-\frac{7}{5}$ $\quad (-7):(+5)=-\frac{7}{5}$

Potenza

$\left(\begin{matrix}numero\\positivo\end{matrix}\right)^n=\left(\begin{matrix}numero\\positivo\end{matrix}\right)$ $\quad (+3)^3\ +27$ $\quad (+3)^4=+81$

$\left(\begin{matrix}numero\\negativo\end{matrix}\right)^n=\begin{cases}numero\ positivo & se\ l'esponente\ n\ è\ pari\\ numero\ negativo & se\ l'esponente\ n\ è\ dispari\end{cases}$ $\quad (-3)^4=+81$ $\quad (-3)^3=+27$

$a^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$ $\quad \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}=\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$

$a^{\frac{n}{p}}=\sqrt[p]{a^n}$ $\quad x^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{a^3}$

Alunno .... classe .... data ....

Scheda attività 3
Le nostre definizioni

Con il tuo gruppo adesso devi cercare le definizioni di numeri “positivi”, “negativi”, “concordi”, “discordi”, “opposti” e di “valore assoluto”. È importante scegliere la definizione che si ritiene migliore e più chiara, e indicare la fonte dalla quale si è reperita (si può anche includere un’altra definizione possibile).

Nome	Definizione	Fonte	Altra definizione possibile
numeri “positivi”			
numeri “negativi”			
numeri “concordi”			
numeri “discordi”			
numeri “opposti”			
“valore assoluto”			
Componenti del gruppo e ruoli rivestiti			

Alunno .... classe .... data ....

Scheda attività 4
Operazioni con numeri relativi

1. Riscrivi in ordine crescente (dal più piccolo al più grande) i seguenti numeri relativi:

+11 –3 0 +2 –5 –7 +1

2. Riscrivi in ordine decrescente (dal più grande al più piccolo) i seguenti numeri relativi:

–5 –2 +3 –1 0 +7 –9 +13 –21

3. *Per ciascuno dei seguenti numeri relativi scrivi il valore assoluto*

a) $|+3|$ = ... c) $|-1|$ = ... e) $|-11|$ = ...
b) $|-5|$ = ... d) $|+10|$ = ... f) $|+7|$ = ...

4. *Scrivi tra le seguenti coppie di numeri relativi il simbolo corretto tra > e <*

a) –5 ... –2 c) –3 ... –5 e) –0 ... +1 g) –11 ... –101
b) –3 ... +5 d) –1 ... +1 f) +3 ... 0 h) +100 ... –99

5. *Per ognuno dei seguenti numeri relativi scrivi il numero opposto*

a) +3 > .... c) +1 > .... e) –3 > ....
b) –2 > .... d) –11 > .... f) +5 > ....

Alunno .... classe .... data ....

Scheda attività 5
Raccontiamo i numeri

In gruppo dovrai provare a costruire una storia che, in modo narrativo, riesca a "raccontare" i numeri e le loro proprietà. Non dovrà essere una spiegazione, ma proprio una storiella. Ciascun gruppo individuerà un relatore/una relatrice che poi racconterà la storia al resto della classe. Dopo il racconto, verranno messi in evidenza come sono state presentate narrativamente le caratteristiche e le proprietà di questi numeri.

Alunno .... classe .... data ....

Scheda attività 6
Lettere e numeri

Considera l'equazione

$x^5 + x^4 + x + 1 = 0$

a. Una sua soluzione è

- ☐ A. $x = 1/4$
- ☐ B. $x = 1$
- ☐ C. $x =$
- ☐ D. $x = -1$

b. Ci sono altre soluzioni reali?

- ☐ Si
- ☐ No

Giustifica la tua risposta

....

....

....

Considera l'equazione

$x^2 + x^2 - 1 = 3$

La sua soluzione è:

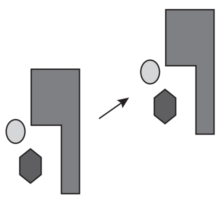
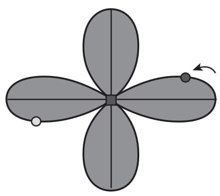
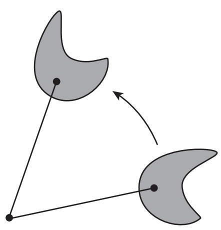
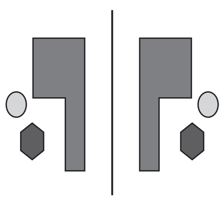
Percorso 2

Forme, figure: cambiamenti, stabilità, relazioni e differenze

Unità di apprendimento 2	Forme, figure: cambiamenti, stabilità, relazioni e differenze
Durata complessiva	15 ore
Collocazione	Unità collocabile in classe prima o seconda della scuola secondaria di primo grado. Alcune attività possono essere svolte anche in classe terza. L'unità trova collocazione ideale anche nel biennio della scuola secondaria di secondo grado.
Competenza/e obiettivo	Confrontare e analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni. Concorre ai seguenti obiettivi chiave di cittadinanza: risolvere problemi, progettare, imparare a imparare.

Attività	Tempi	Modalità di somministrazione
Introduzione alla geometria	Due incontri di 2 ore	L'insegnante solleciterà ogni studente a scrivere poche righe sul significato del termine "geometria", poi chiederà una condivisione in forma libera di quanto scritto e accoglierà le risultanze emerse dalla classe chiedendo ai ragazzi via via di integrarle e specificarle, con l'esito di giungere a una definizione condivisa da tutto il gruppo della parola. L'insegnante avrà il compito di facilitare la partecipazione e al contempo di tenere le fila del ragionamento intorno al termine, nonché di operare una sintesi che, tenendo conto di quanto emerso, insista su: la *geometria* e la *geometria analitica*, la *geometria descrittiva* e su cosa si intenda per *geometrica/geometrico*. I concetti di *precisione* e di *metodo*, indispensabili per l'ambito disciplinare, dovranno risultare chiari alla classe. Con l'obiettivo di esercitare la capacità di riconoscere le forme geometriche in riferimento agli oggetti della vita quotidiana, e quindi di avvicinare la geometria alle esperienze quotidiane, l'insegnante somministrerà la Scheda attività 1: *Cose e forme*. Ciò sarà utile alla classe come spunto di partenza per le ulteriori fasi di apprendimento e per verificare il livello di partenza del gruppo. La scheda è articolata in due pagine e sarà chiesto agli allievi di dare un nome alle forme degli oggetti rappresentati nelle 10 foto (una cornice quadrata, lo strumento musicale triangolo, un cono gelato, il Pentagono, un pallone da calcio, un cappello a cilindro, il pesce rombo, una piramide, una freccia al centro di un bersaglio, due dadi) tutti associabili a enti geometrici. Con l'aiuto della Scheda docente inserto teorico "*Geometria euclidea*" (per il docente) sulle basi della geometria e sui suoi ambiti di utilizzo, l'insegnante torna sul concetto di geometria (come etimologia), e introduce gli elementi (punto, retta, piano) e alcuni dei postulati euclidei (secondo il livello di apprendimento e le pre-conoscenze della classe). Risulta importante mettere in evidenza il rapporto tra la geometria e le altre

Attività	Tempi	Modalità di somministrazione
		scienze, quali la meccanica, l'architettura, la geografia, la navigazione, l'astronomia, ma anche il suo rapporto con la vita quotidiana. Per puntualizzare ancora meglio quelli che sono gli enti fondamentali della geometria l'insegnante potrà utilizzare la presentazione "Forme e spazio.ppt" su punti, linee, piani, spazio reperibile sul sito www.loescher.it/competenze.
Perimetri e distanze	Due incontri di 2 ore	Definiti gli enti fondamentali sulla base dei quali si sviluppano tutte le figure geometriche, l'insegnante procede con la definizione di perimetro e con il calcolo dei perimetri delle principali figure geometriche piane (Scheda docente inserto teorico "*I perimetri*"). Definito il perimetro come la somma dei lati di una figura l'insegnante propone l'attività dal nome "*Che fatica non saper volare!*" nella quale, utilizzando cartine della propria città (con scala di misurazione) chiede ai ragazzi di tracciare il percorso che fanno per andare da casa a scuola, o presso qualunque altro luogo che può essere utile, di misurare le distanze con il righello, di convertire i centimetri in metri (attraverso il rapporto della scala di misurazione della cartina), e di calcolare i metri percorsi. Poi l'insegnante chiede ai ragazzi di tracciare una linea retta in linea d'aria tra i due punti scelti (partenza e arrivo). Misurata quest'ultima distanza e osservatane la minore lunghezza, l'insegnante chiederà di quantificarla percentualmente in relazione al percorso reale calcolato in precedenza. La domanda alla quale rispondere sarà allora: quanta strada percorro in più non avendo le ali? L'insegnante procederà poi con la spiegazione delle aree delle principali figure geometriche piane, non limitandosi a enunciare formule, ma sforzandosi di far comprendere a fondo la questione della misurazione di sezioni definite del piano. La moltiplicazione diviene, all'atto pratico, l'operazione fondamentale delle quattro, più spesso ricorrente, e si chiede alla classe il perché. Si favorirà un brainstorming su questi punti e sugli altri snodi concettuali del calcolo delle aree. Durante la presentazione dell'area del quadrato si proporrà un'ulteriore lettura da "Il mago dei numeri" di H.M. Enzesberger (pp. 76-78), riportando alla lavagna il disegno presentato nel testo.
Aree e pareti	Due incontri di 2 ore	L'insegnante proporrà poi al gruppo un problema di arredamento o finitura di un ipotetico appartamento. Il problema consiste nella copertura con carta da parati della stanza da letto e poi nella sua verniciatura. Data quindi una stanza e considerate le pareti della stessa di dimensioni a scelta da parte dell'insegnante, i ragazzi saranno invitati a trovare le aree delle varie pareti per ordinare la carta da pareti necessaria per rivestirle. Poi invece dovranno provare a verificare quanti litri di vernice gli occorrerebbero, se decidessero di verniciare la stessa, sapendo che un litro coprirebbe (non diluito) una superficie di 4 mq; ovviamente però la vernice va diluita (al 30% con acqua) e copre analoga percentuale di parete in più (ovviamente soltanto per la prima "mano," delle due necessarie); Scheda attività 2: *Rinnovo la mia stanza.* L'ultima parte del secondo incontro dovrà essere dedicata all'acquisizione delle formule relative alla lunghezza della circonferenza (assimilabile al perimetro di un'altra figura) e all'area del cerchio (vedi Scheda docente "*Il Pi greco*").
Le scale di casa con Pitagora	Incontro di 1 ora	Con logica induttiva, l'insegnante spiegherà alla classe, con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, il teorema di Pitagora (che tra i teoremi è probabilmente quello con più immediati risvolti pratici) per poi passare immediatamente al seguente esercizio di dimostrazione. L'insegnante propone un esercizio legato alla ristrutturazione di alcune cose dentro la nostra casa (in coerenza con quanto affermato nella parte introduttiva: utilizzare esempi che possano in qualche modo

Attività	Tempi	Modalità di somministrazione
		essere vicini all'esperienza dei ragazzi può supportarne l'apprendimento). È importante che l'insegnante disegni la figura alla lavagna durante la presentazione del problema. Immaginiamo di dover ordinare una scala di collegamento tra i piani del nostro appartamento e la copertura di rivestimento in legno della stessa. Sappiamo che il nostro triangolo ipotetico è dato da una base di 7 m e da un'altezza di 4 m. Scopriamo quanti scalini dovremo far costruire (sapendo che li vogliamo ognuno di una profondità di 30 cm e con un'alzata di 20 cm) e quindi su quali lati degli stessi applicheremo il rivestimento. I ragazzi dovranno lavorare su carta millimetrata, impostando la loro scala di rapporto di riduzione e sforzandosi di procedere con metodo e precisione. Per la soluzione del problema si dovrà dimostrare di aver chiara l'applicazione del teorema di Pitagora, e applicarlo più volte. Durante l'esercizio l'insegnante dovrà incentivare la partecipazione tra compagni per la soluzione del problema (attività da svolgere a gruppi) (Scheda attività 3: *Costruire una scala e rivestirla* e Scheda *indicazioni docente*).
Il piano: trasformazioni nel piano, le isometrie, le coordinate del piano	Tre incontri di 2 ore (inclusa attività in aula informatica)	Nell'ottica di stabilire e comprendere le relazioni tra figure geometriche, l'insegnante proporrà degli esercizi classici di traslazioni sul piano. *Isometrie piane* Tra le principali trasformazioni geometriche del piano reale si annoverano le isometrie, cioè le particolari trasformazioni geometriche che conservano la distanza tra punti. Le isometrie del piano si possono classificare in:
		Traslazioni 
		Simmetrie centrali 
		Rotazioni 
		Simmetrie assiali 

Attività	Tempi	Modalità di somministrazione
		L'insegnante, dopo avere presentato le isometrie principali (Scheda docente "*Isometria*"), somministra la relativa scheda (Scheda attività 4: *Le isometrie*). Dopo aver condiviso le soluzioni corrette e aver chiesto di esplicitare i ragionamenti che hanno condotto alle varie soluzioni (non accontentandosi dunque di rilevare il giusto/sbagliato), chiederà poi ai ragazzi di disegnare nel loro quaderno alcune figure tracciate alla lavagna e di trasformarle secondo le varie isometrie richieste/proposte. Per concludere il modulo è possibile proporre giochi formativi classici, con risvolti matematici. Ad esempio è possibile con un'attività del tipo *Rintraccia le differenze* ("*Spot the differences*") presentare ai ragazzi una doppia figura, o analoghe figure una di fianco all'altra, come esempio di isometria di traslazione ma con piccole differenze da rintracciare in un tempo dato. Sarebbe opportuno che in questa attività non ci fosse un confronto tra i ragazzi nelle individuazioni delle differenze, almeno in fase iniziale. Considerando ancora il piano come ambito di lavoro geometrico interessante e distensivo, l'insegnante potrebbe presentare al gruppo la tecnica di individuazione delle coordinate mediante incroci di colonne (lettere) e righe (numeri) mediante il più classico dei giochi che sfrutta proprio questo tipo di coordinate: Scheda attività 5: *La battaglia navale*. Il file sarà disponibile sul sito Loescher. www.loescher.it/competenze. L'insegnante potrà organizzare delle sessioni di gioco dividendo la classe a coppie e fornendo a tutti fogli a quadretti, un separatore tra i contendenti e le istruzioni circa il numero e le dimensioni dei vari elementi della propria flotta. Se l'insegnante ha competenze informatiche (necessarie, seppur minime) potrebbe essere molto interessante portare l'esperienza in laboratorio informatico e co-progettare con la classe un sistema di battaglia navale su fogli Excel simile a quello qui proposto e reperibile sul sito www.loescher.it/competenze. Il programma Excel, versatilissimo foglio di calcolo, come è noto sfrutta come elementi base le celle, derivanti dagli incroci di colonne e righe (coordinate).
		Infine, come e forse più che per ogni altro ambito disciplinare, sarà fondamentale da parte dell'insegnante verificare e consolidare gli apprendimenti dei vari moduli, proponendo un ripasso (in itinere o a conclusione del modulo stesso) che in qualche modo sia condotto dai ragazzi (incentivando la loro creatività per rendere i concetti meno noiosi possibile) e monitorato dall'insegnante.

Materiali

1. Esercizi stimolo da: http://www.mat.unisi.it/newsito/lem/finale-m%20analisi%2013.pdf
2. Formulario: www.ing.unisi.it/biblio/e-notes/formulariogeo.pdf
3. Scheda docente inserto teorico "Geometria euclidea"
4. Scheda docente inserto teorico "I perimetri"
5. La Scuola Pitagorica: http://miaplacidusedaltriracconti.blogspot.com/2008/11/la-scuola-pitagorica-e-la-scoperta.html
6. File Excel battaglia navale (su www.loescher.it/competenze)
7. Volume: "*Il mago dei numeri*" di H. M. Enzensberger, Einaudi, 1998
8. Presentazione "Forme e spazio.ppt" (su www.loescher.it/competenze)
9. Scheda istruzioni "Costruire una scala e rivestirla"

10. Scheda docente “Il Pi Greco” (maggiori approfondimenti su www.consiglio.regione.toscana.it:808/news-ed-eventi/pianeta-galileo/atti/2006/17_delpiccolo.pdf)
11. Scheda docente “Isometria”
12. Aula informatica (per inserimento dati in Excel)

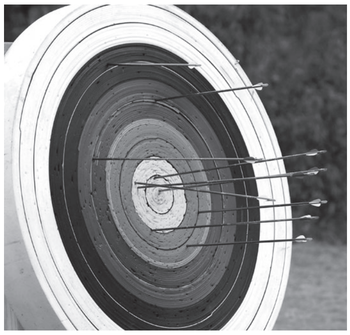
SCHEDE ATTIVITÀ

1. *Cose e forme*
2. *Rinnovo la mia stanza*
3. *Costruire una scala e rivestirla*
4. *Le isometrie*
5. *Battaglia navale* (scheda compilabile disponibile on line sul sito www.loescher.it/competenze)

Alunno .... classe .... data ....

Scheda attività 1
Cose e forme

Quali forme o elementi geometrici riconosci in queste immagini (anche più di uno per figura)? Scrivi e scarabocchia le figure come vuoi.



Alunno .... classe .... data ....

Scheda docente

Inserto teorico Geometria euclidea

Nei 13 libri degli ***Elementi*** Euclide enuncia e dimostra ben 465 *Proposizioni* o *Teoremi*, senza contare i *lemmi* e i *corollari*. A questi vanno aggiunte le Proposizioni contenute in altre opere. I due teoremi che nei manuali scolastici di geometria vanno sotto il nome di primo e secondo teorema di Euclide, sono in realtà dei semplici corollari della Proposizione 8 del VI libro, che nel testo originale è così enunciata:

> «*Se in un triangolo rettangolo si conduce la perpendicolare dall'angolo retto alla base, i triangoli così formati saranno simili al dato, e simili tra loro*».

Il Primo teorema di Euclide

«In un triangolo rettangolo ogni cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la sua proiezione sull'ipotenusa».

Lo stesso teorema si può esprimere geometricamente come segue:

«In un triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni la sua proiezione sull'ipotenusa e l'ipotenusa stessa».

La proporzione invece è $i : c = c : p$ (con i = ipotenusa e c = cateto p = proiezione del cateto).

Il Secondo teorema di Euclide

«In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è medio proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa».

Il secondo teorema può anche essere espresso come:
«In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente i lati congruenti alle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa».

I 5 postulati di Euclide

Tutta la geometria di Euclide si poggia su cinque postulati che il matematico Playfair (1795) espose nel seguente modo:

1. È sempre possibile tracciare una retta tra due punti qualunque
2. È sempre possibile prolungare una linea retta
3. È sempre possibile costruire una circonferenza di centro e raggio qualunque (ossia è sempre possibile determinare una distanza maggiore o minore)
4. Tutti gli angoli retti sono tra loro congruenti
5. Data una retta e un punto esterno a essa esiste un'unica retta parallela passante per detto punto.

Il quinto postulato è conosciuto anche come *postulato del parallelismo* ed è quello che distingue la geometria euclidea dalle altre, dette non euclidee.
Negando il quinto postulato nella versione datane da Playfair, si possono ottenere due diverse geometrie: quella ellittica (nella quale non esistono rette passanti per un punto esterno alla retta data a essa parallele) e quella iperbolica (nella quale esistono almeno due rette passanti per un punto e parallele alla retta data). L'enunciato originale di Euclide (che è dato alla voce quinto postulato) era invece compatibile con la geometria ellittica.

Alunno .... classe .... data ....

Scheda docente

inserto teorico: I perimetri

Significato etimologico della parola "perimetro" secondo il Dizionario Garzanti:
Peri-: primo elemento di parole composte di origine greca o di formazione moderna, dal gr. perí **'intorno'**; significa **'intorno**, **esternamente'**.
Perimetro: dal latino perimetros, a sua volta dal greco περημετροσ, composto di *perí* 'intorno' e *métron* 'misura', 1. (geom.) la linea chiusa che delimita un poligono; indica anche la misura di tale linea.
Ci sono altre parole con peri-, ad esempio pericardio (membrana sierosa che riveste il cuore), periferia, perifrasi (giro di parole che si usa per spiegare meglio un concetto o per evitare di esprimerlo direttamente), periscopio (strumento ottico che permette di esplorare l'intero giro dell'orizzonte).

Chi mi riesce a spiegare matematicamente il fatto che poligoni con lo stesso perimetro abbiano area diversa?
Due poligoni possono persino avere lati ordinatamente uguali ma aree diverse, ad esempio se uno dei due è concavo e l'altro è convesso.
Puoi anche pensare ai rettangoli. Fissando il loro perimetro fissi solo la somma tra la base e l'altezza, ma non il loro prodotto.
O i rombi: quelli con lo stesso perimetro hanno lo stesso lato, ma il prodotto delle loro diagonali può essere diverso.
Più in generale, a parità di perimetro la "figura" con area massima è il cerchio.
In un certo senso più un poligono (di perimetro fissato) si "avvicina" per forma a un cerchio, maggiore è la sua area.

Formule per Perimetro e Area delle varie figure regolari

TRIANGOLO
Perimetro:
Somma dei lati (scaleno)
Lati obliqui per 2 più base (isoscele)
Lato per 3 (equilatero)
Area:
Base × Altezza e prodotto diviso 2

TRAPEZIO SCALENO
Perimetro: Base minore più base maggiore più lato obliquo 1 più lato obliquo 2
Area: Somma della Base minore e Base maggiore moltiplicata per l'altezza e prodotto diviso 2

TRAPEZIO RETTANGOLO
Perimetro: Base minore più base maggiore più lato altezza più lato obliquo

TRAPEZIO ISOSCELE
Perimetro: Lato obliquo per 2 più Base minore più base maggiore
Area: Base per Altezza diviso 2

RETTANGOLO
Perimetro: Base per 2 più altezza per 2
Area: Base per altezza

QUADRATO
Perimetro: Lato per 4
Area: Lato per lato

ROMBO
Perimetro: Lato per 4
Area: Diagonale minore per diagonale maggiore e prodotto diviso 2

PENTAGONO REGOLARE
Perimetro: Lato per 5
Area: Perimetro per apotema e prodotto diviso 2

ESAGONO REGOLARE
Perimetro: Lato per 6
Area: Perimetro per apotema e prodotto diviso 2

EPTAGONO REGOLARE
Perimetro: Lato per 7
Area: Perimetro per apotema e prodotto diviso 2

OTTAGONO REGOLARE
Perimetro: Lato per 8
Area: Perimetro per apotema e prodotto diviso 2

CIRCONFERENZA
2 per Pi greco per raggio (Pi greco = 3.14)

CERCHIO
Pi greco per raggio per raggio (Pi greco = 3.14)

Alunno .... classe .... data ....

Scheda docente
Il Pi greco

Storia del Pi Greco
Il pi greco (π) ha sempre aiutato l'uomo a risolvere dei problemi apparentemente semplici, ma che avevano proprio bisogno di qualche sistema per essere risolti. Il pi greco rappresenta il rapporto tra la circonferenza e il diametro di un cerchio e rimane sempre un numero affascinante perché ha infinite cifre decimali. Ecco una breve storia di questa costante.

π per comodità, viene così calcolato:
3,14159265358 (si usano solo le prime dodici cifre)

π nell'antichità
Le prime scoperte su questo numero misterioso:
25/8 usato dai Babilonesi e da Vitruvio
(16/9)2 usato dagli Egizi
3 usato dai Cinesi
211875/67441 approssimato da Archimede (secondo il quale 223/71 < p < 22/7)
377/120 usato da Claudio Tolomeo
Radice quadrata di 10 usato dal cinese Chang Hong

π nel medioevo
Le prime approssimazioni:
62832/20000 usato dall'indiano Aryhabatta
Radice quadrata di 10 usato dall'indiano Brahmagupta
3,141818 usato dall' italiano Fibonacci

π nell'età moderna
La corsa alla scoperta di più cifre possibili:
Ludolph van Ceulen calcola le prime 35 cifre del pi greco
Abraham Sharp calcola le prime 72 cifre
John Machin calcola le prime 100 cifre
Thomas Fantet de Lagny calcola 127 cifre, di cui 112 sono corrette
Johann Heinrich Lambert prova che p é un numero irrazionale

I record del π nel '900 e nel nuovo millennio
Il calcolo avviene con i calcolatori:
1948: George Rietwiesner, John von Neumann e Nicholas Constantine Metropolis, hanno calcolato 2037 cifre del pi greco con l'EINAC (il primo computer)
1954: La marina statunitense calcolò 3 089 cifre in 13 minuti alla presentazione del NORC (il supercomputer commissionato alla IBM)
1958: Paris Data Processing Center, 10 000 cifre calcolate in un'ora e 40 minuti utilizzando un IBM 704
1997: Yasumasa Kanada e Yoshiaki Tamura, 51 539 607 552 cifre (51,5 miliardi) calcolate in poco piu' di 29 ore utilizzando un computer Hitachi SR220
2002: Yasumasa Kanada, 1 241 100 000 000 cifre (1,2 bilioni) calcolate in più di 600 ore utilizzando 64 computer Hitachi SR8000/MPP

Breve storia di un numero famoso: π
Dai babilonesi ... ai giorni nostri.
di **Vittorio De Petris**
Liberamente tratto da «Storia del Pensiero Matematico» di Morris Kline - Einaudi,1991

Il nome di babilonesi viene dato a una serie di popolazioni che, in tempi successivi, occuparono la Mesopotamia, una regione del Medio Oriente situata tra il Tigri e l'Eufrate. Tra di esse ricordiamo le popolazioni dei Sumeri, che per primi occuparono tale regione a partire dal

Alunno .... classe .... data ....

4000 a.C., seguiti dagli Akkadi (2200 a.C.), dagli Assiri (800 a.C.), dai Caldei (700 a.C.), dai Persiani (540 a.C.), fino alla conquista della Mesopotamia da parte di Alessandro Magno nel 330 a.C. Il massimo periodo di fioritura della cultura babilonese si ebbe tra il 2200 a.C. e il 1700 a.C.
In Mesopotamia il ruolo della geometria era insignificante e quasi sempre legato a applicazioni pratiche. I babilonesi conoscevano certamente il teorema di Pitagora (o meglio alcune terne pitagoriche, senza porsi il problema di una loro generalizzazione) e la similitudine dei triangoli. Per ottenere l'area del cerchio usavano la formula $A=c^2/12$, dove c indica la circonferenza. Ciò equivale a usare per π il valore 3.
Ed è proprio da 3 che comincia dunque la nostra storia.
Per calcolare la lunghezza della circonferenza inscritta nell'esagono regolare, i babilonesi usavano un rapporto che implicava per π il valore di 3+1/8, che equivale a 3,125.
Il valore assegnato a π dai babilonesi era approssimato per difetto. Gli antichi egizi assegnavano invece a π un valore approssimato per eccesso. Essi calcolavano l'area del cerchio mediante la formula $A=(8/9\ d)^2$, dove d è il diametro. In questo caso π assume il valore 256/81 (circa 3,1605).
Occorre arrivare al grande Archimede di Siracusa (287-212 a.C.), per avere i primi due decimali esatti di π. Egli cerca di calcolare la lunghezza della circonferenza per mezzo del perimetro dei poligoni inscritti e circoscritti. La circonferenza ha infatti una lunghezza compresa tra il perimetro di un poligono inscritto e quello di un poligono circoscritto a essa.
Le misure di tali perimetri si avvicinano sempre più tra loro con l'aumentare del numero dei loro lati, permettendo di restringere sempre più l'intervallo entro il quale dev'essere compresa la misura della circonferenza che si desidera trovare. Per tale via, egli riesce quindi a stabilire due valori tra cui π è compreso: $(3 + 10/71) < p < (3 + 1/7)$. Il primo dei due valori vale 3,1408... e il secondo vale 3,1428...
Sono occorsi quasi due millenni per passare da una a tre cifre esatte del nostro numero. Non basterà invece il tempo passato e futuro dell'umanità per trovare *tutte* le altre cifre.
È stato dimostrato infatti da Lambert nel 1761 che π è un numero irrazionale. Perciò le sue cifre decimali sono *illimitate* e *non periodiche* e nessuno potrà mai scriverle tutte. Successivamente, nel 1882, Lindemann dimostrò che π è un numero *trascendente* (significa che esso non può essere ottenuto da un'equazione algebrica a coefficienti razionali), ponendolo in una particolare categoria di numeri irrazionali, che si distinguono rispetto a quelli cosiddetti *algebrici*.
Pur non potendo quindi scrivere tutte le cifre di π, alcuni grandi matematici hanno tuttavia affrontato il problema di scoprire un procedimento che permettesse di trovare quante cifre decimali si desiderano.
Riprendiamo quindi il nostro racconto per descriverne le tappe più significative.
I romani, si sa, non dedicavano molti sforzi allo studio delle scienze (che non fossero quelle giuridiche o militari). Essi si limitarono alla conoscenza, senza ulteriori approfondimenti, delle opere dei greci. Gran parte della geometria di Archimede, per via della sua complessità, finì per essere dimenticata.
Gli uomini del medio evo dovevano risolvere problemi di stretta sopravvivenza (del corpo e dell'anima) e non potevano certo dedicarsi agli studi.
Dobbiamo perciò arrivare al Rinascimento, per assistere a uno spettacolare rifiorire della scienza. In tale periodo, tra i matematici, si sviluppò un'ampia ricerca sui numeri irrazionali.
François Viète (1540-1603), riprendendo il metodo di Archimede ed usando le radici quadrate, calcolò il valore di π considerando poligoni regolari di 4, 8, 16,... lati inscritti in un cerchio di raggio unitario. Per tale via egli trovò che il valore di π è dato da:

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\ \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ \ldots$$

Il reciproco del valore ottenuto, moltiplicato per 2, fornisce un valore sempre più approssimato di π, quanto maggiore è il numero di termini. I primi quattro termini forniscono il valore approssimato **3,14**0331 con le prime due cifre decimali esatte. Con sei termini si ha: **3,1415**13, le cui prime quattro cifre decimali sono esatte. Occorrono dieci termini per avere sei cifre decimali esatte: **3,141592...**

Alunno .... classe .... data ....

L'inglese John Wallis, nella sua *Arithmetica infinitorum* (1655), usò una frazione, i cui termini sono costituiti da una serie ininterrotta di moltiplicazioni. Dal numero di fattori usati dipende l'approssimazione di π:

$$\pi/4 = (3.3.5.5.7.7...)/(2.4.4.6.6.8...)$$

Wallis usava numeri razionali per calcolare π, contrariamente a Viète che usava le radici quadrate. Tuttavia la formula di Wallis richiede almeno 1000 termini per avere le prime due cifre decimali esatte di π.
Il grande Gottfried Wilhelm von Leibniz ottenne nel 1674 il famoso risultato:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Siamo dunque arrivati a definire π come il quadruplo della somma a segni alternati dei reciproci nella successione dei numeri dispari. Peccato che occorrano ben 764 termini per calcolare π anche solo con la precisione ottenuta da Archimede.
A questo punto va detto che il nostro π non ha ancora assunto il suo attuale nome.
Fu il matematico inglese William Jones che, nel 1706 usò il simbolo π, in onore di Pitagora (l'iniziale di Pitagora nell'alfabeto greco è appunto P, ma, trattandosi di un numero, si preferisce usare la minuscola). Tuttavia, ancora nel 1739 lo svizzero Leonhard Euler (1707-83), da noi italianizzato in Eulero, usava il simbolo *p*.
Fu proprio Euler nel 1743 a fornire una ennesima formula per il calcolo di π:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

La formula di Euler è più efficace di quella di Leibniz, per il fatto di usare solo termini positivi. Essa richiede tuttavia un numero di termini ancora piuttosto alto per ottenere le prime due cifre decimali esatte di π. Per avere 3,14 occorrono almeno 600 termini, contro i 764 richiesti dalla formula di Leibniz.
Non bisogna tuttavia pensare che ciò costituisca un problema per un matematico. Per la sua mentalità, è sufficiente che il metodo proposto, facendo uso di una formula possibilmente *elegante,* garantisca di trovare quante cifre decimali si vogliano di π. Che poi occorrano milioni di termini per avvicinarsi lentamente ai risultati desiderati è un fatto del tutto secondario e marginale!
Del resto il problema dei calcoli, al giorno d'oggi, è effettivamente diventato secondario. Disponiamo ormai di super calcolatori che riescono a fare milioni di operazioni al secondo. È perciò possibile ottenere migliaia di cifre esatte di π, anche se poi resta da chiedersi a cosa potranno servire.
Chi volesse risparmiare tempo e fatica, potrà usare una comune calcolatrice, di quelle che si distribuiscono in omaggio con le scatole di detersivo, per avere con facilità un bel numero di cifre esatte di π.
Il sottoscritto, dopo qualche tentativo con un foglio di calcolo Excel, ha trovato (ma quasi certamente ci sarà qualcun altro che c'è già arrivato prima) un semplice rapporto, che fornisce le prime 7 cifre decimali di π, con un piccolissimo errore:

355/113

Usando la suddetta calcolatrice, si potrà dividere il numeratore per il denominatore e si vedrà apparire sul visore: 3.1415929
Il valore noto delle prime 8 cifre di π è 3.1415926.
L'errore è minore di 3 decimilionesimi.

Estratto da http://www.webalice.it/vdepetr/t02/Text02.htm

Alunno .... classe .... data ....

Scheda attività 2
Rinnovo la mia stanza

Hai deciso di rinnovare la tua stanza, coprendola con carta da parati. Partendo dalle dimensioni delle pareti fornite dall'insegnante ora devi calcolare quanta carta ti occorrerà per rivestire le pareti.
Hai poi cambiato idea e dovrai calcolare quanta vernice ti serve a coprire la carta, sapendo che un litro di vernice non diluita coprirebbe una superficie di 4 mq. Ovviamente però la vernice deve essere diluita con acqua al 30% e dunque coprirà il 30% di parete in più. Calcolando che dovrai, molto probabilmente, dare due "mani" di vernice, calcola quanta vernice ti serve.

Alunno .... classe .... data ....

Scheda attività 3

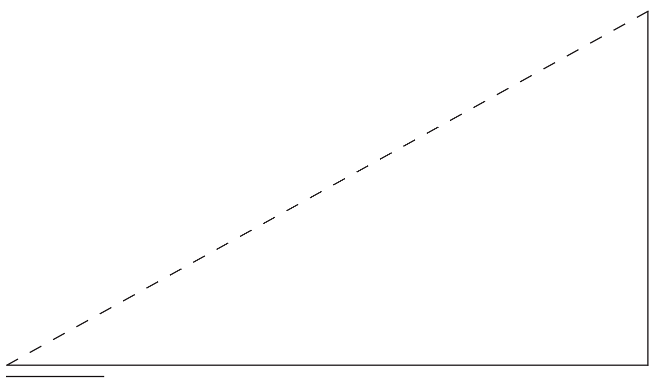
Costruire una scala e rivestirla

Immaginate di dover ordinare una scala di collegamento tra i piani del vostro appartamento e la copertura di rivestimento in legno della stessa.
Il triangolo ipotetico è dato da una base di 7 m e da un'altezza di 4 m.
Scoprite quanti scalini dovrete far costruire (sapendo che li volete ognuno di una profondità di 30 cm e con un'alzata di 20 cm) e quindi calcolate il perimetro del rivestimento necessario basandovi ovviamente su quali lati degli scalini verrà applicato il rivestimento.

Procedete con l'ausilio del teorema di Pitagora che vi sarà più volte utile per questo esercizio.

La presente scheda può esservi utile per i calcoli, ma per il disegno conclusivo (con relativa scala da voi impostata) utilizzate i fogli di carta millimetrata.

Sezione della scala



1 m

Alunno .... classe .... data ....

Scheda indicazioni docente
Costruire una scala e rivestirla

L'attività dovrà essere svolta per sottogruppi di 3, massimo 4 allievi.
Durante l'esercizio l'insegnante dovrà incentivare la partecipazione tra compagni per la soluzione del problema.
L'esercizio va svolto in parallelo sulla scheda allievi "Costruire una scala e rivestirla" dove i ragazzi dovranno abbozzare la soluzione del problema e i calcoli relativi. I risultati e la definizione del disegno della scala completa dovrà essere trasferito poi su carta millimetrata da parte dei gruppi, impostando la loro scala di rapporto di riduzione e sforzandosi di procedere con metodo e precisione.

Per la soluzione del problema si dovrà dimostrare di aver chiara l'applicazione del teorema di Pitagora, dovendolo applicare più volte:
- primariamente nella definizione della ipotenusa complessiva della scala (linea tratteggiata su scheda allievi) *soluzione ipotenusa 8,06 m = 806 cm*
- di seguito nella definizione della sezione di ipotenusa complessiva coperta da ciascun scalino (20*30 cm) *soluzione ipotenusa scalino = 36,05 cm*

La soluzione è dunque 806/36,05 = 22(,35) quindi 22 scalini e il pezzetto di spazio in più non coperto sarà compensato sull'altezza del primo scalino.

Alunno .... classe .... data ....

Scheda docenti
Isometria

Per isometria si intende una trasformazione geometrica che conserva la lunghezza dei segmenti, ossia, dati due punti A, B, l'isometria fa ad essi corrispondere due punti A′ e B′, attraverso un movimento rigido, tali che:

$$AB = A'B'$$

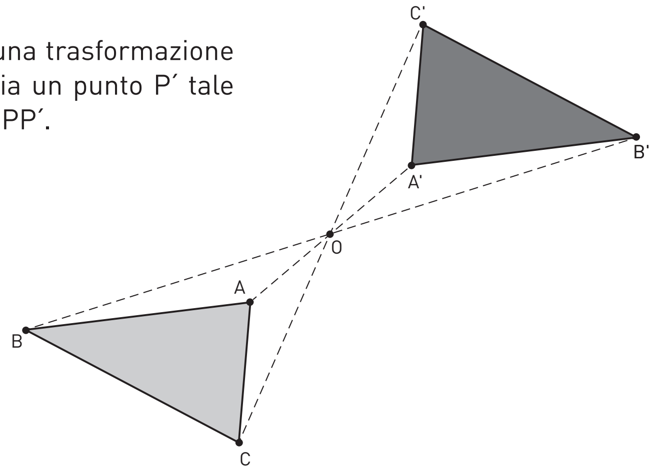
Le isometrie godono delle seguenti proprietà:

- conservano l'allineamento tra i punti;
- conservano l'incidenza e il parallelismo tra le rette;
- conservano l'ampiezza degli angoli.

Pertanto le figure trasformate in un'isometria risultano congruenti a quelle date.
Verranno di seguito studiate in dettaglio le simmetrie centrali e assiali, le traslazioni, le rotazioni (riportate negli esercizi della scheda attività 4 "Le isometrie").

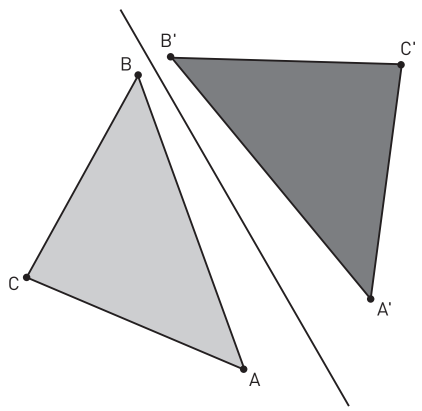
Simmetria centrale

Definizione
La simmetria centrale di centro C è una trasformazione che ad ogni punto P del piano associa un punto P′ tale che C è il punto medio del segmento PP′.



Simmetria assiale

Definizione
La simmetria assiale (quindi simmetria rispetto ad un asse) è una trasformazione che ad ogni punto P del piano associa un punto P′ tale che il segmento PP′ è perpendicolare all'asse e il punto medio (M) di PP′ appartiene all'asse.



Alunno .... classe .... data ....

Traslazione

<u>Definizione</u>

La traslazione di vettore **v** = (a, b) è una trasformazione che ad ogni punto P del piano associa un punto P' tale che il vettore **PP´** è uguale al vettore **v** (vettore di spostamento).

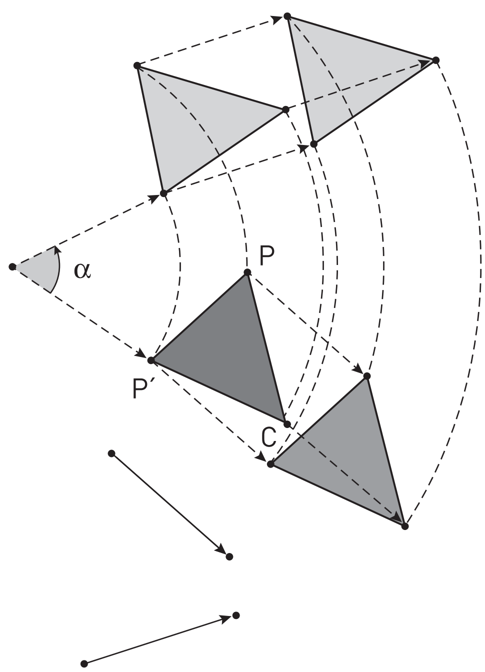
Se (*a*, *b*) sono le componenti del vettore **v** l'espressione analitica della traslazione è data da:

$$\begin{cases} x^1 = x + a \\ y^1 = y + b \end{cases}$$

Rotazioni

<u>Definizione</u>

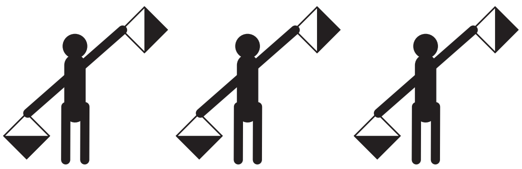
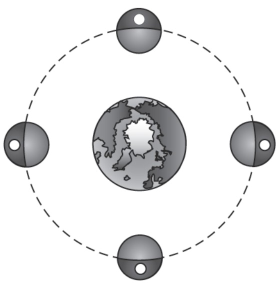
La rotazione di centro C e angolo alfa (α) è la trasformazione che ad ogni punto P associa il punto P´ tale P C = P´C e l'angolo PCP´ è uguale ad alfa.



Alunno .... classe .... data ....

Scheda attività 4
Le isometrie

Unisci le figure sotto con il tipo di isometria (trasformazione nel piano) che la riguarda.

	ROTAZIONE
	SIMMETRIA ASSIALE
	TRASLAZIONE
	SIMMETRIA CENTRALE

Alunno .... classe .... data ....

Scheda attività 5

Battaglia navale

L										
I										
H										
G										
F										
E										
D										
C										
B										
A										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

L										
I										
H										
G										
F										
E										
D										
C										
B										
A										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Percorso 3
Niente è impossibile ...

Unità di apprendimento 3	Niente è impossibile...
Durata complessiva	16 ore
Collocazione	Unità da collocare all'inizio della scuola secondaria di primo grado, auspicabilmente nel primo anno (o all'inizio del biennio della secondaria di secondo grado)
Competenza/e obiettivo	Individuare le strategie appropriate per la risoluzione di problemi. L'unità concorre anche al raggiungimento delle seguenti competenze chiave e di cittadinanza: risolvere problemi, progettare, imparare a imparare.

Attività	Tempi	Modalità di somministrazione
Riderci sopra... per poi prenderla sul serio...	Incontro di 2 ore	Nell'introduzione, per abbassare il livello di tensione che si crea spesso con argomenti che riguardano frazioni, percentuali ecc. si mostrerà almeno un video del professor Fontecedro che affronta con ironia l'inutile complicazione che spesso utilizziamo per spiegare cose semplici. Dal video del professor Fontecedro si passerà a video più "seri" che introdurranno, in maniera graduale alcuni degli argomenti previsti dall'unità.
Numeri razionali, numeri interi, frazioni, percentuali	Incontro di 2 ore	Dopo aver ripreso o introdotto i concetti di numeri razionali, numeri interi, di frazioni, di proporzioni e di percentuali, il docente consegna ai ragazzi la Scheda attività 1: *Fare percentuali, frazioni, proporzioni* e chiede di completarla individualmente risolvendo gli esercizi che ci sono. Successivamente confronta le diverse modalità di soluzione degli esercizi e li discute brevemente.
Dalla realtà al ... trasloco	Tre incontri di 2 ore	Nel primo incontro il docente propone all'aula questi stimoli di riflessione: "*Esiste la realtà e noi la vediamo così com'è? Quanto ciò che vediamo interpretando la realtà influenza come ci poniamo?*". Successivamente per far sperimentare direttamente la soggettività della percezione propone questa esercitazione senza fornire troppe istruzioni: *scrivere in due minuti tutto ciò che vedono intorno a loro.* Una volta trascorsi i due minuti il docente invita alla lettura e al confronto evidenziando come ciascuno abbia colto degli aspetti differenti della stessa realtà e come dunque il "vedere" la realtà in modo diverso contribuisca ad affrontare la stessa in un modo differente. Per far questo il docente annota le risposte date dai ragazzi (ovvero ciò che è stato visto) elencandole in un foglio della lavagna a fogli mobili mentre ciascuno legge il proprio elenco, annotando anche le occorrenze (ovvero da quante persone è stata vista una determinata cosa), poi fa seguire una trasformazione in percentuale e spiega, di nuovo, le percentuali.

Attività	Tempi	Modalità di somministrazione
		A supporto dell'attività precedente si può procedere alla lettura del brano stimolo tratto da *"Lo strano caso del cane ucciso a mezzanotte"* di M. Haddon, Einaudi, Torino, 2003 (pp. 13–15), in cui si spiega la reale composizione di *"L'effetto Via lattea"* e della percezione che si trae a guardare l'universo in una direzione piuttosto che in un'altra. Questo breve estratto è utile a recuperare il concetto di punto di vista e di più possibilità di approccio e soluzione multipla di problemi, compresi quelli matematici. Durante la lettura è utile riportare alla lavagna il disegno relativo presente a pagina 14. Nell'incontro successivo il docente, prima di introdurre l'attività di simulazione sul "trasloco" (che occuperà due incontri), illustrerà i concetti di proporzionalità diretta e inversa e un approfondimento sul teorema di Pitagora (che dovrebbe aver introdotto nell'unità precedente). Per la presentazione del concetto di proporzionalità è utile prima chiarire il termine stesso, facendo alcuni esempi delle due direzioni: inversa e diretta. Importante sarà che il conduttore riporti alla lavagna i grafici delle due possibili proporzionalità su asse cartesiano. Inserendo nei due assi le variabili in analisi, la proporzionalità diretta presenterà una linea retta sempre crescente (dal basso "punto 0" verso l'alto a destra obliquamente), quella inversa in senso opposto (dall'alto "primo punto in analisi" verso il basso a destra obliquamente). A questo punto sarà introdotta un'attività strutturata: la simulazione di un trasloco, con una breve narrazione orale da parte del docente che illustrerà la situazione di urgenza e il bisogno di traslocare in tempi veloci. Un trasloco è, infatti, un concentrato di piccoli problemi da risolvere. Il docente chiede all'aula di immedesimarsi nell'organizzazione di un trasloco (il docente può mostrare il video di un trasloco, leggere un passaggio di una narrazione che parla di traslochi ecc..) e invita gli studenti a riflettere sull'opportunità di poter coinvolgere alcuni amici che possano aiutare ad affrontare il difficile compito. Come prima attività viene consegnata agli allievi la Scheda attività 2: *Viaggi e lattine.* Una volta compilata da parte di tutti, ci si confronterà per evidenziare i percorsi seguiti per le soluzioni. Analogamente vengono proposte le Scheda attività 3: *La lampada della nonna* (per fare calcoli su dimensioni e spazi) e la Scheda attività 4: *Un po' di organizzazione...* (per applicare quanto appreso finora e formalizzare una procedura di risoluzione di problemi). Per l'attività 4 sarà necessario formare dei gruppi e nominare un coordinatore. Ogni gruppo poi riferirà le proprie scelte, i criteri seguiti, le soluzioni individuate. Nella discussione il docente cercherà di favorire la riflessione su ciò che si è appreso, in termini più generali, rispetto alla soluzione di problemi.
Una strana valutazione	Incontro di 2 ore	Il docente propone un'attività di autovalutazione di quanto appreso fino a oggi inserendovi, contemporaneamente, un breve focus sui grafici e sulle modalità di rappresentazione attraverso grafici (almeno le tipologie principali). L'insegnante porrà domande a cui gli studenti risponderanno oralmente. Le risposte verranno annotate alla lavagna con le crocette (per individuare poi le frequenze relative alle loro risposte). Una volta raccolti i dati il docente trasforma, chiedendo il supporto degli studenti, i valori raccolti in grafici.

Attività	Tempi	Modalità di somministrazione
		Esempi di domande e traduzione grafica: • Quanti di voi pensano di aver capito tutto fino a oggi delle due giornate precedenti? Quanti in parte? Quanti per niente? (questi dati potrebbero essere rappresentati attraverso *un grafico a torta*); • Ripensando ai giorni scorsi, cosa vi è piaciuto di più tra il video di introduzione alla geometria del Prof. Fontecedro, le letture, le attività di organizzazione di un trasloco? (questi dati potrebbero essere rappresentati attraverso *un istogramma*); • Qual è attualmente il vostro umore? E ieri? L'umore di una persona può procedere per alti e bassi quindi questi dati saranno rappresentati attraverso *un grafico a linea spezzata*. Il docente può proporre la stessa analisi con il profitto di un'azienda o con qualsiasi altro valore che varia nel tempo. A questo punto il docente favorirà una discussione sui metodi di rappresentazione più utilizzati e sulla loro funzione, su cosa consentono di vedere meglio permettendo, agli allievi, di fare inferenze sui grafici e sulla loro migliore applicabilità/applicazione.
Una mente bellissima	Due incontri di 2 ore	Presentazione del film "*A beautiful mind*". Prima e dopo la proiezione del film stesso è opportuno che l'insegnante riporti l'attenzione sull'approccio alla matematica nella vita quotidiana. Si può aprire una parentesi, se necessario, sulla teoria degli equilibri e dei giochi, quando cioè i massimi risultati si ottengono quando "ogni membro del gruppo fa quello che è meglio per se stesso e per il resto del gruppo" ampliando e completando le teorie precedenti. Come attività conclusiva verrà proposta un'attività-gioco in cui sia evidente il valore della cooperazione per la costruzione di una strada. Ci sono due società a cui è assegnato il compito di costruire una strada. Ciascuna deve costruire, nel minor tempo possibile, la propria strada. Il committente, assegna però i finanziamenti con un meccanismo piuttosto strano in cinque tranche. Le tranche sono di 50.000 euro. Se la somma delle richieste è inferiore o pari a 50.000 euro ottiene il finanziamento solo la squadra che ha chiesto di più. Se la somma delle richieste è superiore a 50.000 entrambe le squadre vengono penalizzate dell'importo rispettivamente richiesto. Se la somma delle richieste è superiore a 50.000 ma una delle due squadre ha chiesto una cifra uguale o inferiore alla metà la squadra in questione riceve ciò che ha chiesto e l'altra viene penalizzata per l'importo richiesto. Le richieste vengono consegnate al conduttore in buste chiuse contemporaneamente. Il conduttore esplicita le richieste e quanto le due squadre hanno ottenuto. Dopo tre turni è possibile inviare due rappresentanti a trattare tra loro e poi tornare nelle squadre per riferire l'eventuale accordo raggiunto. Ovviamente l'accordo può anche non essere rispettato. Il gioco aiuterà a riflettere sulle opportunità di cooperare o competere. A conclusione del gioco si rifletterà su quanto ciascuna squadra avrebbe potuto, potenzialmente, ottenere e quanto in realtà ha ottenuto.

Materiali

1. Video: Prof Fontecedro - La geometria non ha basi solide
   http://www.youtube.com/watch?v=eIE60cWs7c0
   A che servono le frazioni?
   http://www.youtube.com/watch?v=eoLj2FCr9xY
   Contafacile: le frazioni
   http://www.youtube.com/watch?v=aSTGfJC7pxE&feature=related
2. Approfondimento sul Teorema di Pitagora:
   http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/APPUNTI/TESTI/Gen_02/Cap5.html
3. DVD del film "A beautiful mind"

BRANI STIMOLO

1. *L'effetto via Lattea*, da "*Lo strano caso del cane ucciso a mezzanotte*" di M. Haddon, Einaudi, Torino, 2003 (pp. 13–15)

SCHEDE ATTIVITÀ

1. *Fare percentuali, frazioni, proporzioni*
2. *Viaggi e lattine*
3. *La lampada della nonna*
4. *Un po' di organizzazione...*

Alunno .... classe .... data ....

Scheda attività 1
Fare percentuali, frazioni, proporzioni

Nella tua classe è stato deciso di avviare un programma di controllo del peso di ciascuno. Per avere un quadro complessivo ti viene chiesto di fare alcune trasformazioni. Trasforma i dati sul numero di persone che rientrano in una certa fascia di peso in percentuali, frazioni, proporzioni.

Fascia di peso	Persone	Percentuali	Frazioni	Proporzioni
40-50 Kg	5			
50-60 Kg	15			
60-70 Kg	8			
70-80 kg	2			

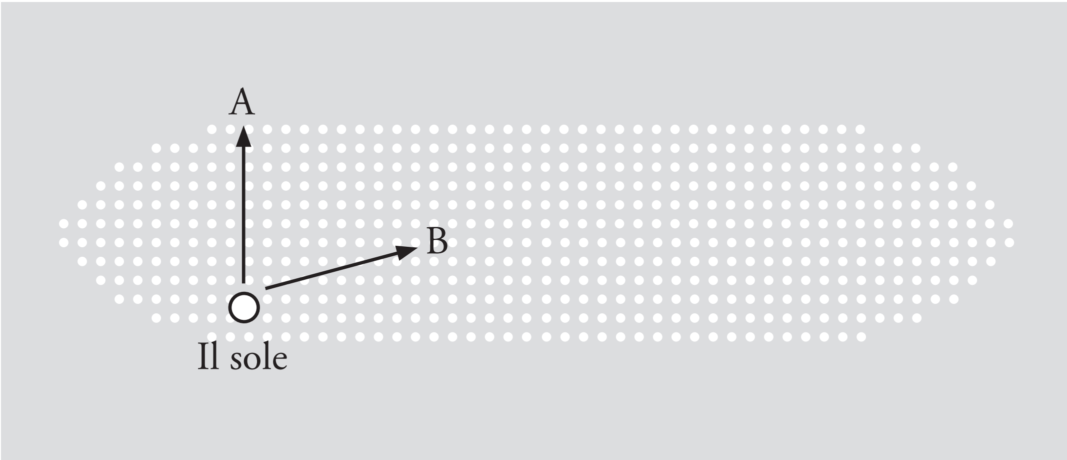
Dalla correzione collettiva ho capito che:

Alunno .... classe .... data ....

L'effetto via Lattea

Osservavo il cielo mentre procedevamo verso il centro. La notte era limpida e si vedeva la Via Lattea.

Qualcuno crede che la Via Lattea non sia altro che una lunga fila di stelle, ma non è così. La nostra galassia è un enorme disco di stelle lontane 100.000 anni luce e il sistema solare si trova da qualche parte alla sua estremità.



Quando si guarda in direzione di A, a 90° rispetto al disco, non si vedono molte stelle. Se invece si guarda verso B le stelle sono molte di più, perché lo sguardo va dritto verso il corpo principale della galassia, e poiché la galassia è un disco, si vede una lunga fila di stelle.

Allora pensai al fatto che gli scienziati si erano scervellati per tanto tempo sul perché di notte il cielo è scuro anche se ci sono miliardi di stelle nell'universo – stelle da qualunque parte si guardi –, e al fatto che il cielo dovrebbe risplendere, visto che non ci sono grandi ostacoli a fermare la luce.

Poi scoprirono che l'universo era in espansione, che le stelle dopo il Big Bang si allontanavano all'impazzata l'una dall'altra. E che più le stelle erano distanti dalla Terra più si muovevano in fretta; alcune di esse correvano quasi alla velocità della luce, e per questo motivo il loro bagliore non arrivava mai fino a noi.

Questa cosa mi piace. Si riesce a capirla semplicemente osservando il cielo sopra le nostre teste, riflettendo senza dover fare domande a nessuno.

E quando l'universo avrà terminato di esplodere, tutte le stelle rallenteranno la loro corsa, alla fine si fermeranno e cominceranno di nuovo a cadere verso il centro dell'universo, come fa una palla gettata in aria. E allora non ci sarà più niente a impedirci di vedere tutte le stelle del mondo perché si avvicineranno, sempre più velocemente, e noi capiremo che il mondo presto sparirà, perché quando guarderemo il cielo di notte non ci sarà più il buio ma soltanto lo splendore di luce di milioni e milioni di stelle, tutte stelle cadenti.

Solo che nessuno se ne accorgerà perché non ci saranno sopravvissuti sulla Terra. L'umanità sarà estinta. E se anche ci fossero delle persone ancora in vita non farebbe nessuna differenza perché la luce sarebbe talmente forte e accecante che verrebbero arse vive, anche se abitassero sottoterra.

(da "*Lo strano caso del cane ucciso a mezzanotte*", M. Haddon, Einaudi, Torino, 2003, pp. 13-15)

Alunno .... classe .... data ....

Scheda attività 2
Viaggi e lattine

Dobbiamo organizzare un trasloco. Ci servono degli amici per farlo se non vogliamo metterci un'eternità e ci serve qualcosa per dissetare ciascuno durante le pause. In che relazione stanno il numero di amici e il numero di viaggi fatti per il trasloco? In che relazione stanno invece il numero degli amici e il numero di lattine?

Rappresenta qui sotto dei grafici che parlino di questi due rapporti:

AMICI – VIAGGI Come si chiama questa proporzione? ______________________________

Disegna il grafico che la rappresenta

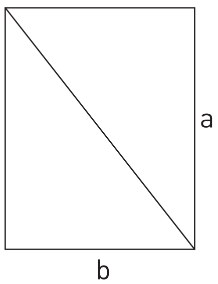
AMICI – LATTINE Come si chiama questa proporzione? ______________________________

Disegna il grafico che la rappresenta

Alunno .... classe .... data ....

Scheda attività 3
La lampada della nonna

Devi capire se quella ingombrante lampada di tua nonna entra distesa nella diagonale del bagagliaio della macchina oppure no. Perché? Meglio procedere con sicurezza, perché la lampada, che non ti è nemmeno mai piaciuta, è pesante in modo incredibile e quindi non puoi provarcela e poi provare se c'entra in un altro verso, senza rischiare di farti male alla schiena. Dunque come si può procedere? Devi misurare lo spazio più lungo del tuo bagagliaio (o di quello dell'auto di tuo padre): la diagonale (che vedi sotto) e vedere se la lampada di nonna c'entra o no, sapendo che questa maledetta lampada misura 1 m e 65 cm. Buon lavoro!
Come procedi per il calcolo della diagonale? Calcola e scrivi il processo seguito.



A = **1,3 m**

B = **0,7 m**

C = **?**

Processo seguito:

Alunno .... classe .... data ....

Scheda attività 4

Un po' di organizzazione...

Ogni gruppo nomina un coordinatore (il coordinatore è il proprietario dell'appartamento cioè colui o colei che trasloca nella nuova casa), che deve gestire un budget di 250 euro per le spese di trasloco, organizzare lo smontaggio, i viaggi e il montaggio nella nuova casa.

CI SONO LE SEGUENTI REGOLE DA SEGUIRE:

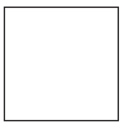
1. Minimo numero possibile di viaggi (per risparmiare sulle spese di benzina)
2. Garantire pasti e bevande ai collaboratori
3. Ridurre al minor numero possibile le giornate di lavoro.

Di seguito troverete un elenco di cose da traslocare con relative dimensioni.

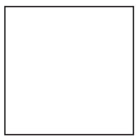
Avete a disposizione tre macchine (Doblò, Kangoo, Mercedes) con dimensioni e capacità di carico differenti. Ogni macchina comporta la presenza di due persone. A voi la scelta di usarne una, due o tre (e quali) per ogni giorni di lavoro, con relativi aiutanti.

I gruppi devono indicare tutti i passaggi dei vari carichi (con tempi e spese relative), considerando anche le pause panini e bevande per tutti (sulla base di prezzi reali).

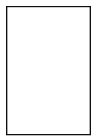
BAGAGLIAIO DOBLO'
(a = 1,6 m; b = 1,8 m; h = 1,5 m)



BAGAGLIAIO KANGOO
(a = 1 m; b = 2 m; h = 1,3 m)



BAGAGLIAIO MERCEDES
a = 1,2 m; b = 2 m; h = 1,1 m)



(misure espresse in m)

Divano 1 (a = 2; b = 1,5; h = 0,5)

Divano 2 (a = 1,6; b = 1,5; h = 0,5)

Poltrona (a = 1; b = 1; h = 1,5)

Letto matrimoniale (a = 1,8; b = 2; h = 0,5)

6 Sedie (ognuna a = 0,4; b = 0,4; h = 0,8)

TV (a = 0,2; b = 1; h = 0,7)

Armadio smontato pezzo 1 (a = 1,5; b = 0,8; h = 2)

Armadio smontato pezzo 2 (a = 1; b = 0,8; h = 2)

Tavolo (a = 1,8; b = 0,8; h = 1,2)

Percorso 4

Vedo, raccolgo, interpreto, calcolo, capisco ... e rappresento

Unità di apprendimento 4	Vedo, raccolgo, interpreto, calcolo, capisco... e rappresento
Durata complessiva	13 ore
Collocazione	Unità collocabile in classe prima o seconda della scuola secondaria di primo grado. Alcune attività possono essere svolte anche in classe terza. L'unità trova collocazione ideale anche nel biennio della scuola secondaria di secondo grado.
Competenza/e obiettivo	Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico. Concorre ai seguenti obiettivi chiave di cittadinanza: risolvere problemi, individuare collegamenti e relazioni, acquisire e interpretare l'informazione, collaborare e partecipare.

Attività	Tempi	Modalità di somministrazione
Camera mia, disegno il mio pezzo di mondo; confronto tra spazi	Tre incontri di 2 ore	Si propone di seguito un'attività strutturata che affronta con taglio semplice e coinvolgente molti dei concetti e contenuti importanti per l'unità di competenza, quali: concetto di approssimazione; confronto di dati; capacità di rappresentazione grafica; capacità di calcolo; utilizzo dei grafici fondamentali; utilizzo fogli di calcolo su PC. L'insegnante propone lo spezzone tratto dal film "*V per Vendetta*" in cui la protagonista subisce l'incarcerazione e scopre un testo scritto nella tana di un topo, che le rivela i sogni e la forza d'animo della prigioniera incarcerata prima di lei in quella cella dal regime. A seguire la classe sarà invitata a effettuare un brainstorming dal titolo: "*Quale è il vostro centimetro di spazio da salvare, quello dove vi sentite liberi*?" In questa fase i ragazzi vanno guidati, gradualmente, fino a che non emerga da parte di qualcuno l'identificazione del proprio centimetro all'interno della propria camera o in una stanza particolare della propria casa (o in modo più metaforico). L'insegnante prende spunto per impostare l'attività intorno alla stanza da letto che sarà, in questa fase, il filo conduttore di tutte le prossime attività. In questa fase sarà importante sottolineare, per evitare che qualche allievo/a si senta in difficoltà, che sono utili alla classe intera tipologie diverse di camera, grandi, piccole, condivise con numerose persone, solitarie, vissute in due ecc. L'insegnante chiederà quindi a ciascun allievo di disegnare il più precisamente possibile con l'ausilio del righello e in scala (meglio se su carta millimetrata) la propria camera o comunque la stanza in cui dorme, compreso tutto il mobilio e gli oggetti presenti all'interno.

Attività	Tempi	Modalità di somministrazione
		Verrà chiesto di inserire, *per approssimazione*, le misure della stanza e di tutti gli oggetti e conseguentemente di calcolarne le relative aree. In questa fase può essere molto utile veicolare il concetto di *proporzione* tra gli oggetti e di rispetto della stessa nella definizione dei rapporti tra le figure geometriche (approssimando a figure geometriche piane anche talune eventualmente irregolari), al fine di ottenere risultati accettabili e abbastanza vicini al reale. Il conduttore chiederà ai ragazzi di calcolare, in metri quadrati, quanto è lo spazio calpestabile della propria stanza, cioè quello spazio in cui essi possono camminare, in quanto non occupato da nessun tipo di mobile. Nella fase di rappresentazione grafica delle stanze e di calcolo delle aree, coloro che avessero terminato prima di altri dovranno essere invitati eventualmente ad aiutare altri compagni in difficoltà, con l'avvertenza di non sostituirsi al compagno nell'esecuzione dell'attività, ma di aiutarlo a capire cosa sta facendo e cosa deve fare (favorendo l'apprendimento e la cooperazione tra pari e premiando i gruppi in cui la cooperazione è stata finalizzata all'apprendimento). L'insegnante chiederà poi di calcolare, sia in termini percentuali che attraverso le frazioni, la quantità di spazio calpestabile in relazione alle dimensioni complessive della stanza. Come attività conclusiva l'insegnante proporrà un'attività che richiama in campo almeno due dei tre tipi di grafici fondamentali (istogramma e grafico a torta). Si chiede difatti a ciascun ragazzo individualmente di rappresentare in forma grafica la propria camera e le relazioni tra gli spazi calpestabili e quelli non calpestabili, precedentemente calcolati (il grafico a torta, utile a rappresentare parti del tutto o percentuali, sarà quindi utile in questa fase). Importante sarà dare senso alla divisione del cerchio (o torta) nella definizione del grafico, attraverso l'utilizzo del goniometro o, in alternativa, approssimando in maniera più precisa possibile secondo una logica per scomposizione, le dimensioni delle due differenti parti della torta. L'insegnante chiederà poi di rappresentare nel grafico le relazioni tra le aree dei soli oggetti presenti nella propria camera, individuando graficamente quale di esse incide di più nella percentuale di non-calpestabilità (in questo caso sarà l'istogramma a tornarci utile nella rappresentazione e messa in paragone dei rapporti tra gli elementi). Per concludere l'attività e per promuovere l'attivazione e il confronto tra i compagni, l'insegnante chiederà a ognuno di riportare a turno alla lavagna le percentuali di calpestabilità e gli altri dati emersi al fine di paragonare i risultati e avere un'idea complessiva delle camere di tutti e dei loro rapporti. Si utilizzerà in questo caso un unico e complessivo grafico a istogramma, avendo cura di graduare l'asse delle ordinate in modo che i ragazzi posizionino a turno le loro risultanze in maniera più propria possibile. L'insegnante chiederà infine un *feedback* conclusivo chiedendo ai ragazzi di commentare i risultati complessivi alla lavagna e di ragionare sull'utilizzo dei dati emersi e sulla loro rappresentazione grafica. L'attività si presta infine a una traduzione in un laboratorio informatico dei risultati e dei dati emersi: qui l'insegnante potrà fare impostare ai ragazzi, divisi per piccoli gruppi, tabelle dati e relativi istogrammi relativi all'attività appena condotta. Qualora si ritenga che l'attività svolta con la camera possa rappresentare un problema per alcuni componenti della classe (camere anguste, spazio vitale condiviso con troppi soggetti) si potrà procedere con una stanza più neutra, come la cucina o la stanza nella quale consumano il pasto serale.

Attività	Tempi	Modalità di somministrazione
Misure, grandezze e conversioni	Incontro di 2 ore	L'insegnante procederà alla spiegazione di questa sezione teorica sui seguenti argomenti: le scale di misurazione; i rapporti tra grandezze; ripresa e approfondimento del concetto di approssimazione (Scheda docente: "*Le scale di misura*"; Scheda docente "*Approssimazione*"). Introdurrà il concetto di approssimazione e il suo utilizzo. Per ogni concetto presentato con questo e il precedente approfondimento è opportuno fare esempi e farne fare ai ragazzi. L'insegnante partirà dalla definizione di lunghezza, di grandezza e di volume per giungere quindi alla funzione del SI e alla comprensione del concetto di ordine di grandezza a partire dai relativi prefissi, con esempi tratti dalla vita quotidiana (a es. kilobyte, chilometro, chilogrammo, litro ecc.). Sempre a partire da casi della vita quotidiana l'insegnante insegnerà ad applicare opportunamente le conversioni di lunghezze e aree (a es. da cm a m e km e da cm^2 a m^2 e km^2) proponendo specifici esercizi. Si giungerà quindi alla comprensione del concetto di grandezze incommensurabili (vedi Scheda docente: "*I Pitagorici e la scoperta degli irrazionali*").
In classe: da soli, che fatica! (proporzionalità inversa)	Incontro di 2 ore	Per partire sarà opportuno aver creato un ambiente adeguato in aula, chiedendo la collaborazione della classe e la partecipazione attiva all'esercizio. Allontanate le sedie dall'aula, i banchi saranno predisposti, uniti l'uno accanto all'altro, al centro della classe. L'insegnante chiederà al gruppo di svolgere un compito di ridistribuzione di tutti i banchi della classe dalla posizione iniziale a una posizione finale differente (a esempio: disposizione a ferro di cavallo o quella della configurazione abituale della classe). Chiederà quindi di svolgere il medesimo compito prima a un solo ragazzo del gruppo; successivamente ripeterà l'attività aumentando di volta in volta di un elemento il numero dei partecipanti all'attività. L'insegnante cronometrerà ogni volta i tempi di esecuzione, registrandone i risultati. Il gruppo via via allargato di partecipanti (si consiglia un massimo di 6 ragazzi coinvolti) svolgerà lo stesso compito in un tempo progressivamente minore e così, avvertendo la differenza in ordine ai tempi di esecuzione via via ridotti, i ragazzi esperiranno la logica della proporzionalità inversa (maggiore sarà il numero di elementi cooperanti, minori saranno i tempi di esercizio). A questo punto, riordinati i banchi, i ragazzi saranno invitati, sotto la guida dell'insegnante, a riportare l'esercizio in un piano cartesiano sul proprio quaderno. Si inserirà dunque su un asse il numero dei ragazzi e sull'altro i tempi di esecuzione-prova corrispondenti. Unendo i punti si troveranno le coordinate che definiranno la classica "linea curva a scendere" tipica di questa proporzionalità. Al termine poi della seconda attività laboratoriale che andiamo a descrivere di seguito, gli stessi risultati saranno poi riportati in aula informatica su fogli di calcolo per ambedue le attività (e quindi per entrambe le proporzionalità), giungendo alla definizione dei grafici su assi cartesiani che mostrino anche, al variare dei valori dei campi, inclinazioni differenti per le rette di proporzionalità. Ciò renderà evidenti i rapporti tra variabili prese in considerazione mostrando come, a seconda del rapporto che insiste tra le stesse, varino in maniera più o meno forte le risultanze e quindi si palesino rette sul piano con inclinazione più o meno accentuata (es. rapporto 1/3: al variare di una di un punto, l'altra triplica; rapporto ¼: al variare di una di un punto, l'altra quadruplica ecc.). Al termine del lavoro al computer i ragazzi avranno avuto in tal modo una visione contemporanea, chiara e completa delle tre possibili rappresentazioni dei dati (numerica, grafica e simbolica).

Attività	Tempi	Modalità di somministrazione
Sommelier si diventa! (proporzionalità diretta)	Incontro di 2 ore	Per esperire invece in forma laboratoriale la proporzionalità di tipo diretto (pur richiamando anche quella inversa) l'insegnante propone l'attività "*Sommelier si diventa*!", dividendo come prima cosa la classe in piccoli gruppi (il piccolo numero consente una più fluida partecipazione di ciascun ragazzo alla sperimentazione). Fornirà poi a ciascun gruppo i materiali utili all'esperimento (bicchieri, bottiglia di succo d'arancia, bottiglia d'acqua naturale) e la Scheda attività 1: *Sommelier si diventa! Il mio cocktail* da compilare con i dosaggi tra gli ingredienti, le loro proporzioni e i risultati in termini di gusto percepito. I ragazzi saranno quindi invitati a creare le loro soluzioni con il succo di frutta e l'acqua rispettando le quantità riportate nella Scheda istruzioni: *Sommelier si diventa!* o, in alternativa, scegliendo loro i volumi degli ingredienti in *ml*, ma rispettando comunque le proporzioni della Scheda istruzioni: *Sommelier si diventa!*, con l'unica cautela di non produrre miscele "esondanti" il bicchiere. Nota bene: utilizzare lo stesso rapporto ma quantità differenti, potrebbe stimolare la cura e la precisione sul compito da parte dei ragazzi; elementi che abbiamo detto essere determinanti all'approccio alla materia. Dopo aver prodotto e assaggiato le proprie miscele (cocktail), i ragazzi saranno invitati a compilare la Scheda attività 1: *Sommelier si diventa! Il mio cocktail* in cui verrà chiesto loro di completare la loro tabella di proporzione tra gli ingredienti e di rispondere a domande specifiche, collegate all'attività. Le osservazioni laboratoriali dei ragazzi dovrebbero risultare in linea con quanto sotto espresso: nella miscela 1, 2, 3 il sapore resta uguale o veramente molto simile, mentre nella 4 il sapore diventa decisamente più intenso. Le conclusioni da trarne dovrebbero essere che fino a quando il rapporto tra quantità di succo e acqua resta costante, anche il sapore della miscela non cambia. Quindi, fino a quando facciamo variare in modo direttamente proporzionale le grandezze (quantità di succo e acqua), il sapore resta invariato, con l'unica differenza - comunque importante - dell'aumento volumetrico della miscela. Se le due quantità non variano in modo direttamente proporzionale (e quindi il rapporto tra variabili subisce una variazione come nel caso 4), la proporzionalità salta e conseguentemente anche il sapore cambia. L'esperienza conduce alla convinzione che i ragazzi attraverso la formalizzazione successiva del metodo laboratoriale ottengano una ricaduta importante sulle proprie competenze, ma rafforzino anche notevolmente la permanenza delle conoscenze così acquisite. Attività come questa consentono di farlo, tra l'altro, in maniera coinvolgente, piacevole ed efficace. È importante, per non insinuare fraintendimenti, che al termine dell'attività appena descritta l'insegnante chiarisca bene alla classe che la proporzionalità diretta riguarda unicamente il "senso" delle due variabili e il loro legame matematico, non necessariamente la loro crescita (come nel caso esperito), ma anche la loro proporzionale decrescita (opportuno fornire molti esempi e farne ideare ai ragazzi, dei due tipi di proporzionalità ma anche dei tipi di "direzione"). La proporzionalità inversa attiene invece a direzioni differenti dei due elementi, al crescere dell'una, l'altra decresce proporzionalmente e viceversa. Come accennato al termine della precedente attività "*In classe: da soli, che fatica!*" anche in questo caso sarà opportuno riportare i dati in fogli elettronici in aula informatica, agevolati tra l'altro da tabelle raccolta dati già compilate dai gruppi.

Attività	Tempi	Modalità di somministrazione
Capra o auto?	Incontro di 1 ora	Nell'ambito dell'unità di apprendimento sul calcolo delle probabilità, l'insegnante potrebbe trovare stimolante dedicare una narrazione su un matematico dalla vita avventurosa come Girolamo Cardano, che su questo tema ebbe molto da dire (declinando e compenetrando aspetti puramente matematici con aspetti di vita degli stessi protagonisti). Utile il richiamo ad una didattica interdisciplinare che consenta collegamenti tra materie; in questo caso si potrebbe aprire un parallelo sul periodo storico relativo (vedi "Appunti docente storico/biografici "*Girolamo Cardano*", primo studioso delle questioni relative alla probabilità, 1501-1576). Altro utilizzo di una narrazione significativa potrebbe essere uno spezzone del film "*A beautiful mind*" in cui il prof. Nash dimostra la propria teoria dei giochi, studiando il movimento dei colombi nel piazzale adiacente alla propria stanza o, in un altro frangente, quando spiega agli amici il procedimento matematico per avere successo con una ragazza entrata con il suo gruppo di amiche nel bar. Essenziale in ambedue le situazioni giungere alla definizione – che Nash dimostra matematicamente attraverso un procedimento algebrico assai complesso – di come la collaborazione tra elementi cooperanti, anziché una loro competizione individualistica, possa condurre a risultati migliori. L'insegnante potrebbe trovare inoltre significativo, nell'ambito dell'unità di apprendimento, introdurre o sintetizzare il tema delle probabilità attraverso la lettura del brano stimolo "*Il dilemma di Monty Hall*", da "*Lo strano caso del cane ucciso a mezzanotte*" di M. Haddon, Einaudi, 2003 (pp. 77–80). Durante la lettura l'insegnante dovrebbe riportare alla lavagna la rappresentazione grafica dello schema di soluzione del gioco a quiz proposto nel romanzo, facendo partecipare i ragazzi allo svolgimento. Si chiede agli alunni che tipo di probabilità vi sia di indovinare dove si trova l'auto o di incappare nella capra, rispetto alla sequenza di azioni proposte dal conduttore del quiz (risposta scontata è pensare che sia il 50%, così come riportato nei commenti di molti matematici indicati nella narrazione). Poi i ragazzi saranno stupiti dalla soluzione reale (66,666%), nel caso in cui in seconda battuta si opti per cambiare la porta scelta. Lo stupore, si ricorda, è uno dei fissativi dell'apprendimento. Occorre allora approfittare di quel momento di sintonia e soffermarsi, con pazienza, sulla motivazione. Ciò è dovuto chiaramente alle condizioni di partenza del gioco stesso (due porte nascondono una capra e una sola una macchina), quindi durante la prima scelta concessa al partecipante del quiz la possibilità di imbattersi nella porta che cela una capra è maggiore rispetto all'altra. Le basi di partenza sono quindi condizione necessaria perché il gioco non venga falsato o in taluni casi "truccato"! Ad uso del docente, la stessa fonte web (vedi relativa Scheda docente: "*Il dilemma di Monty Hall*") riporta in termini più canonici e meno narrativi la stessa esperienza matematica intorno al calcolo delle probabilità, narrata da M. Haddon; risulterà dunque utile come approfondimento.

Materiali

1. DVD del film "*V come vendetta*" (disponibile anche su youtube)
2. Fogli di carta millimetrata
3. Scheda docente "*Le scale di misura*"
4. Scheda docente "*Approssimazione*"
5. Scheda docente "*I Pitagorici e la scoperta degli irrazionali*"
6. Cronometro
7. Aula informatica (per inserimento dati in Excel)
8. Bicchieri, succo, acqua naturale (per laboratorio attività "Sommelier si diventa!")
9. Scheda docente appunti storico/biografici: *Girolamo Cardano*
10. DVD del film "*A beautiful mind*"
11. Scheda docente "*Il dilemma di Monty Hall*"

BRANI STIMOLO

1. M. Haddon *Il dilemma di Monty Hall* da "Lo strano caso del cane ucciso a mezzanotte", di M. Haddon, Einaudi, 2003, pp. 77-80.

SCHEDE ATTIVITÀ

Istruzioni: "*Sommelier si diventa!*"

1. "*Sommelier si diventa! Il mio cocktail*"

Alunno .... classe .... data ....

Scheda istruzioni
"Sommelier si diventa!"

MISCELA	Succo arancia (ml)	Acqua naturale (ml)	Rapporto succo/acqua	Intensità del sapore
1	40	80	½ (0,5)	Sapore riferimento (valore ipotetico = 1)
2	60	120	½ (0,5)	× uguale (valore = 1)
3	100	200	½ (0,5)	× uguale (valore = 1)
4	250	250	1	× più intenso (valore = 2)

Alunno .... classe .... data ....

Scheda attività 1
"Sommelier si diventa! Il mio cocktail"

MISCELA	Succo arancia (ml)	Acqua naturale (ml)	Rapporto succo/acqua	Intensità del sapore
1	40	80	½ (0,5)	Sapore riferimento (valore ipotetico = ...)
2			½ (0,5)	
3			½ (0,5)	
4			1	

Quale differenza come sommelier avete notato tra i sapori delle miscele 1, 2, 3 e 4?

Come collegate il comportamento del sapore della miscela con i valori numerici presenti nella tabella del tuo gruppo?

Indicate in che modo il sapore della miscela e la proporzione di acqua e succo sono in relazione?

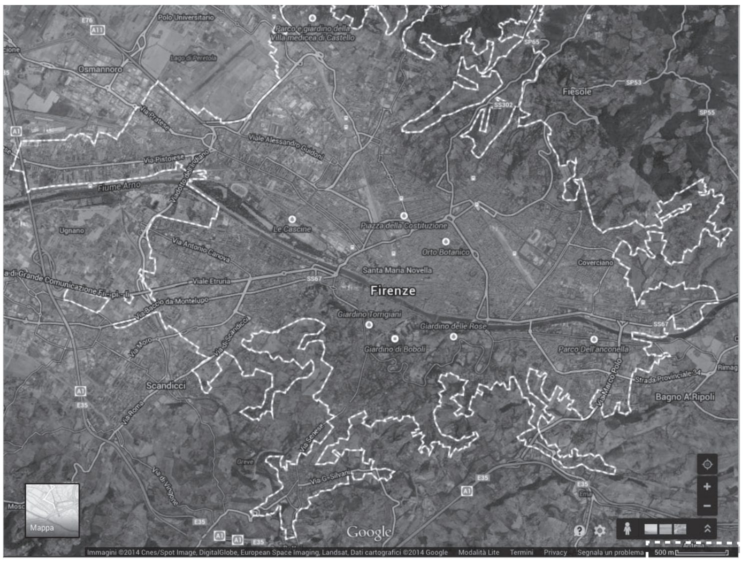
Aggiungete le vostre considerazioni:

Gruppo: ....

Alunno .... classe .... data ....

Scheda docente
Le scale di misura

Sorvolando in aereo una determinata zona potrai scorgere sotto di te strade, costruzioni, fiumi, vallate, mari, boschi e montagne ecc. Avrai cioè una panoramica dall'alto di un determinato territorio: lo stesso che si può trovare su una carta topografica, cioè su un disegno di quella zona come se fosse vista dall'alto (sia essa cartacea o, come sempre più frequentemente avviene, in formato digitale interattivo su supporti informatici). L'immagine sotto, tratta dal software google.maps, sfrutta immagini satellitari, connesse ad applicazioni estremamente sofisticate (es. street view), ma che hanno alla base un'immagine satellitare che noi possiamo avvicinare o allontanare alla nostra vista, operando delle modifiche sulla scala di misurazione.
L'immagine presa in considerazione sfrutta una scala (evidenziata dal tratteggio bianco in basso a destra) dove il rapporto, anche se non esplicitato in forma 1: × (ad esempio 1:10.000 come pare nell'esempio), è chiarito dal rapporto che passa tra la linea misurata in 2 cm e il valore in metri espresso sopra: 200 m. Quindi impostando l'equazione e riportando tutto a stessa unità di misura:
2 cm : 20.000 cm = 1 cm : 10.000 cm, che significa che il rapporto di scala sarà 1:10.000 e in altre parole che un centimetro nella carta equivale a 10.000 cm, quindi 100 m, sulla terra.



Sarà chiaro certamente come anche le carte stradali, usate dagli automobilisti, oppure le carte di zone particolari (un gruppo montuoso, un parco nazionale, ecc.) utilizzano scale di rimpicciolimento e vedute aeree, siano satellitari e realistiche/paesaggistiche quali quella sopra o con evidenti soltanto le vie di comunicazione come nel caso delle carte stradali, o ancora ibridazioni delle due tipologie. Il rimpicciolimento del reale sulla carta è espresso, come detto, dal rapporto di scala: ad esempio se il disegno è 100.000 volte più piccolo della zona che rappresenta si dice che la sua scala è di 1:100.000 (si legge uno a centomila) e ciò significa che le misure sono state ridotte di centomila volte e quindi 1 centimetro sulla carta corrisponde a 100.000 centimetri (1 chilometro) sul terreno.
La scala, quindi, è il rapporto fra la lunghezza sulla carta e la corrispondente lunghezza reale sul terreno.

Alunno .... classe .... data ....

Tabella delle corrispondenze:

Corrispondenze		
Scala	*1 Km sul terreno equivale a:*	*1 cm sulla carta equivale a:*
1:5.000	20 cm sulla carta	50 m sul terreno
1:10.000	10 cm sulla carta	100 m sul terreno
1:25.000	4 cm sulla carta	250 m sul terreno
1:50.000	2 cm sulla carta	500 m sul terreno
1:100.000	1 cm sulla carta	1 Km sul terreno

Un piccolo espediente per sapere immediatamente a quanti metri sul terreno equivale un centimetro sulla carta, è quello di coprire gli ultimi 2 zero del numero della scala e leggere il resto.

Alunno .... classe .... data ....

Scheda docente
Approssimazione

Il termine **approssimazióne** s. f. [der. di approssimare] in termini matematici è definito dal vocabolario Treccani di lingua italiana come: "*calcolare con a.; a. per eccesso, per difetto; metodo delle a. successive, procedimento che permette di costruire una successione di grandezze i cui valori, via via ottenuti, si avvicinano progressivamente al valore di una grandezza data, in modo che la differenza tra questa e la grandezza ottenuta tende ad annullarsi*."
Ci si approssima o avvicina quindi al risultato esatto senza incontrarlo in maniera perfetta. Ciò potrebbe apparire come una contraddizione per il senso comune che suole annoverare la matematica tra le scienze esatte, come per esempio nella nota affermazione "la matematica non è un'opinione!"
È di contro la matematica stessa che ci dice che esistono situazioni definite in cui la perfezione dei numeri e la certezza di un risultato non possono essere verificabili, operando ad esempio all'interno del sistema dei numeri irrazionali. L'uso delle approssimazioni può dunque essere giustificato dal fatto che spesso l'incompletezza delle informazioni disponibili non consente l'uso di modelli e rappresentazioni esatte. Inoltre molti problemi e fenomeni del mondo fisico, ma anche di quello matematico, sono o troppo complessi per essere rappresentati con espressioni analitiche, o addirittura impossibili da modellare. Questo è il caso ad esempio del valore della radice quadrata di 2, quindi del calcolo della diagonale del quadrato, della storia di Ippaso e dei pitagorici descritta nella Scheda "I Pitagorici e la scoperta degli irrazionali".
Inoltre, anche quando una rappresentazione analitica è nota a volte può essere conveniente, ai fini pratici, adottare rappresentazioni approssimate, allo scopo di ridurre la complessità del problema.
Il concetto di approssimazione trova abituale applicazione in ambito matematico, quando cioè si ha a che fare con numeri e con posizioni decimali dopo la virgola, ma è pure applicato frequentemente in problemi geometrici (il calcolo della diagonale del quadrato ne è un esempio chiaro) e in leggi fisiche.
È bene definire quindi come una approssimazione, concetto matematico a tutti gli effetti, sia indispensabile nella rappresentazione di una qualche grandezza che, pur essendo fatta in modo inesatto, è tuttavia abbastanza precisa (approssimata appunto alla perfezione) da poter essere usata, presa per corretta, ed abbia cioè una qualche utilità pratica sul lavoro.
Tecnicamente dal punto di vista prettamente numerico si operano approssimazioni all'interno di queste due famiglie: approssimazioni per troncamento e approssimazioni per arrotondamento.

- **Approssimazione per troncamento**: in questa tipologia di approssimazione si "tronca" letteralmente il numero a livello della cifra significativa necessaria: ad esempio, il numero 14,69316... può essere troncato a livello della terza cifra significativa (o al primo decimale dopo la virgola), ottenendo così 14,6; oppure a livello della quinta cifra (terzo decimale dopo la virgola) ottenendo così 14,693 e così via a seconda delle opportunità, degli usi e del livello di approssimazione richiesto dall'operazione.
- **Approssimazione per arrotondamento**: all'interno di questa seconda famiglia di approssimazione si possono avere a loro volta due tipi di approssimazioni: per *difetto* o per *eccesso*, a seconda che la prima cifra che vogliamo togliere assuma un valore minore di cinque (approssimazione per difetto) o maggiore o uguale ad esso (approssimazione per eccesso).

Come nel caso precedente, un numero può essere approssimato a livello di qualsiasi cifra significativa: ad esempio il numero 14,69306... può essere arrotondato a livello della terza cifra significativa, ottenendo così 14,7 (essendo la terza cifra 6, quindi maggiore di 5); oppure a livello della quinta cifra significativa, che essendo 3 si approssima per difetto a 0, risultando così 14,690. E così via.

Alunno .... classe .... data ....

Scheda docente

I Pitagorici e la scoperta degli irrazionali

La scuola pitagorica fondata a Crotone da Pitagora nel 530 a.C. contribuì nel tempo al considerevole sviluppo della matematica e del pensiero scientifico, ma al contempo la derivazione della scuola dalle comunità orfiche e delle sette religiose d'Egitto e di Babilonia (terre che, secondo la tradizione, Pitagora avrebbe conosciuto in occasione dei suoi precedenti viaggi), contribuì certamente alla chiusura e alla rigidità verso l'esterno e verso opinioni distoniche rispetto alla perfezione dei numeri che i pitagorici andavano professando. I caratteri tipici della setta si evidenziavano anche dai segni di riconoscimento che la scuola utilizzava tra i suoi adepti: la nota stella a 5 punte fiammeggiante; nonché da un rigido sistemi di dogmi e divieti sopra i quali si giurava estrema riservatezza.
In particolare, il divieto tassativo di divulgare notizie a proposito della "incommensurabilità della diagonale del quadrato" segnò uno dei maggiori drammi della storia dei numeri. Fu difatti, come vedremo, il probabile assassinio di Ippaso di Metaponto, reo di aver infranto la tassativa prescrizione, a far coincidere al dramma umano anche un arresto notevole degli sviluppi aritmetici del pensiero matematico.
Era presente nei pitagorici la concezione di un mondo eterno rivelato all'intelletto e non ai sensi, conoscibile dunque attraverso il procedimento scientifico. Ma come anticipato, la storia di Ippaso pare dimostrare come prestigio e passione per l'assoluto, possono talora trasformarsi in integralismo e violenza.
I Pitagorici vissero sempre questa ambivalenza e se da una parte conquistarono eccelsi primati intellettuali, quali ad esempio la teoria delle proporzioni, la congettura attorno a una Terra mobile, i legami imprescindibili tra matematica e musica, o la vera e propria invenzione della matematica come disciplina a sé; dall'altra si arroccarono su posizioni rigide e seguirono precetti bizzarri quali quello di non toccare i galli bianchi, quello di non mangiare fagioli o di non passeggiare per le vie maestre.
Affascinante e ricco di precognizione il rapporto tra i pitagorici e la musica[1]. Sperimentando con una lira, il maestro Pitagora scoprì che gli intervalli musicali dipendono da precise relazioni di lunghezza delle corde, intuendo e arrivando a codificare una delle più antiche leggi fisiche dell'uomo. L'intima relazione tra note e aritmetica venne definita nella Scuola come armonia, una parola greca che designava l'ottava musicale, ma che poi assunse il significato etico di 'giusta relazione'. I Pitagorici si convinsero che l'universo si reggesse su accordi aritmetici. Tutto era riconducibile a semplici proporzioni ed era perfetto, cioè compiuto, dotato di capo e coda, come le corde della lira.
Le misure con cui questi pensatori avevano studiato erano rappresentabili come interi o come parti ben delimitate di interi. Ad esempio, il numero 2/3 (due terzi) poteva essere visto come due lunghezze uguali allineate a formare un'unica lunghezza che poi veniva divisa esattamente in tre porzioni (*anche questo procedimento è ben evidenziato nel filmato Disney proposto in nota*).
L'estasi intellettuale che derivava dall'avanzamento degli studi della Scuola, sfociava immediatamente in posizioni rigide e integraliste. Nello specifico: nessuno doveva dubitare che i numeri interi e i loro rapporti, cioè i numeri razionali ('*ratio*' in latino vuol dire 'rapporto') fossero l'essenza genuina del Creato.

---

1. Utile e simpatico per avvicinare la classe alla scuola pitagorica e al suo rapporto con la musica, l'utilizzo dello spezzone del film Disney "Paperino nel mondo della Matemagica" del 1959. Reperibile integralmente su youtube al seguente indirizzo: http://www.youtube.com/watch?v=2oyUCQhD2BM

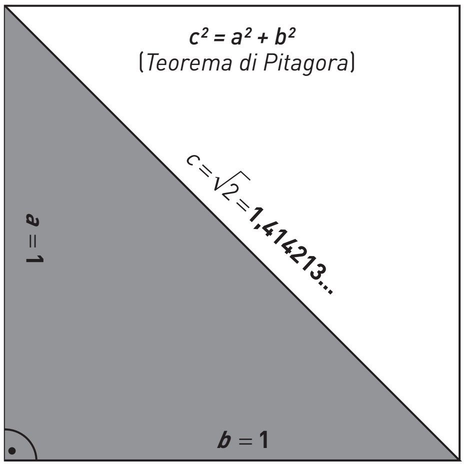
Alunno .... classe .... data ....

Eppure, uno di loro, tale Ippaso di Metaponto, dubitò. Accadde nel V secolo a.C. quando i dotti della Scuola si scontrarono con una problematica, solo all'apparenza banale, calcolare la diagonale del quadrato.
La risoluzione passò attraverso il famoso teorema di Pitagora sui triangoli rettangoli. Come impariamo sin dai tempi scolastici, se *c* è l'ipotenusa e *a* e *b* sono i due cateti di un triangolo rettangolo, deve valere: c2 = a2 + b2 (il quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti). Nel caso della diagonale del quadrato i due cateti (o i lati del quadrato stesso) sono uguali. Supponendoli unitari in una certa scala di misura (1 cm, 1 m, ecc.) si tratta allora di attribuire a *c* quel valore che elevato al quadrato dia 2 come risultato, cioè si tratta di calcolare la radice quadrata di 2 (!2). I Pitagorici disponevano di sistemi ingegnosi per risolvere l'equazione pitagorica, ma nessuno funzionava per la diagonale c del quadrato.
Ippaso di Metaponto, matematico appartenente alla Scuola, comprese, per primo, che mai nessuna formula matematica, né semplice né complessa, avrebbe mai potuto derivare il valore esatto, razionale della diagonale del quadrato.
Analogamente esistevano oltre alla radice quadrata di 2 molte altre, anzi infinite altre, operazioni che parevano non ricadere nel campo dei numeri razionali.
Oggi sappiamo che i numeri irrazionali, come appunto radice quadrata di 2 sono quantità reali che sviluppano dopo la virgola una serie di decimali infinita e imprevedibile. Che significa imprevedibile? Significa che in taluni casi è imprevedibile e pare non seguire logica apparente il decimale dopo la virgola che seguirà il precedente.
Diversa è la situazione per le quantità razionali con cui trattavano abitualmente i Pitagorici. Ad esempio per il numero 2/3 = 0,666... possiamo benissimo prevedere quale sia il decimale in una generica posizione, dato che è sempre 6. Lo stesso dicasi per un numero come 5/4 = 1,25000... (si ripete 0), per 1/99 = 0.010101... (si ripete 01). Precisando quali siano le cifre periodiche, riusciamo insomma a definire perfettamente questi numeri, in tutta la loro interminabile estensione.
Nel caso della radice di 2, che è irrazionale, è come se la sequenza periodica si allargasse a dismisura, sino a non ripetersi più.
Riportando alcuni decimali, la radice di 2 vale: 1,4142135623730950488016887242097... Le cifre dopo la virgola sono illimitate e non ripetitive. Questo vuol dire che non è in alcun caso possibile precisare un valore come radice quadrata di 2: si tratta dunque di una grandezza incommensurabile.
La cosa oggi pare non essere di grande impedimento in termini pratici (e anzi ci apre ad un rapporto completo con gli insiemi numeri riportati negli schemi a fondo pagina), ma ciò significò un problema teorico di enorme portata, specie se relazionato al dogmatismo pitagorico.
La Scuola non poteva accettare l'idea di valori non del tutto calcolabili, riflesso di un cosmo incompiuto e impuro; ma Ippaso fu a tal punto colpito dalla condizione, perché introduceva la matematica nei meandri affascinanti dello sconfinato, che decise di divulgare la scoperta, contravvenendo ai tabù della Scuola.

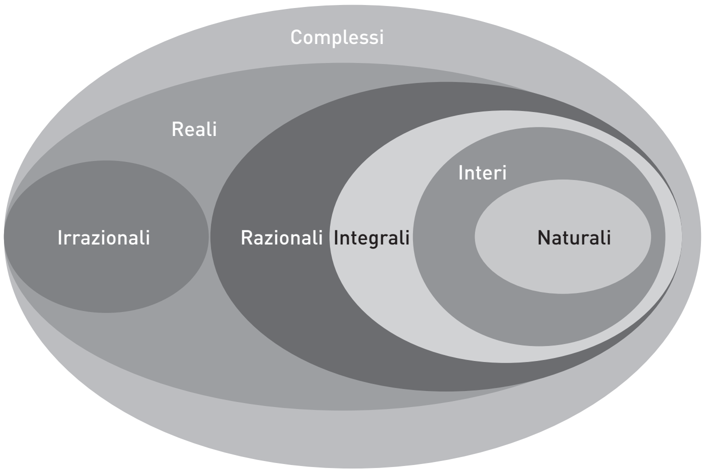
L'irregolarità dei numeri irrazionali non poteva adeguarsi al punto di vista di un universo rigidamente ordinato e così i Pitagorici mancarono, come dicevamo, una grande occasione: quella di ampliare i propri orizzonti ed estendere le proprie conoscenze e quelle dell'umanità intera intorno al modo dei numeri.
Ippaso venne radiato dalla congrega per empietà. La sua misteriosa morte in un naufragio fu evento visto dai suoi ex-compagni come giusta punizione divina. È in verità probabile ch'egli fosse stato annegato per mano della Scuola.
Dopo la morte di Ippaso la sovranità dei numeri razionali durò ancora per 2300 anni, sino a quando il tedesco Georg Cantor nel 1874 tornò ad affrontare di petto la questione degli irrazionali e dell'infinito.

Alunno .... classe .... data ....

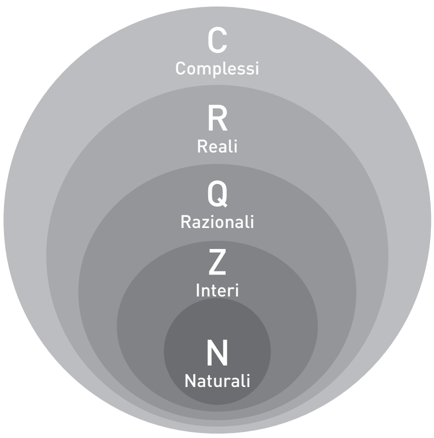
La diagonale del quadrato corrisponde a una misura irrazionale, ossia non esprimibile esattamente con alcun metodo di calcolo aritmetico:



Rappresentazione grafica con diagramma di Venn dell'insieme dei numeri:



Rappresentazione grafica dell'insieme dei numeri semplificato (con abbreviazioni):



Alunno .... classe .... data ....

Scheda docente
appunti storico/biografici
Girolamo Cardano

"La teoria della probabilità non è in fondo che buon senso ridotto a calcolo; essa permette di valutare con esattezza ciò che le menti illuminate sentono per una specie di istinto senza rendersene conto... È notevole come tale scienza, che è cominciata con gli studi dei giochi d'azzardo, si sia elevata ai più importanti oggetti delle conoscenze umane".
Così si esprimeva, circa due secoli fa, Blaise Pascal (Clermont-Ferrand, Puy-de-Dôme, 19 giugno 1623 – Parigi, 19 agosto 1662).

I primi studi conosciuti su questioni di probabilità si riferiscono al gioco dei dadi e compaiono nel libro *De ludo aleae* (Il gioco dei dadi) di Girolamo Cardano (1501-1576), a sua volta appassionato giocatore. Vale la pena soffermarsi un momento sulla vita di questo studioso originale ed eclettico, che non si occupò solo di Matematica dove raggiunse discreti, anche se discussi risultati, ma di Medicina, di Fisica, di Astrologia, di Meccanica (ricordate il giunto cardanico?), di Alchimia e Scienze.
Figlio illegittimo di un avvocato e di una vedova molto più giovane, Girolamo venne avviato allo studio della Matematica proprio dal padre, appassionato di tale disciplina, che insegnava Geometria all'Università di Pavia e pare fu consultato anche da Leonardo.
Iniziò i suoi studi di Medicina proprio a Pavia, ma li terminò a Padova. Come medico ebbe molto successo: la sua fama si estese anche in Europa, tanto che nel febbraio 1552 fu invitato a curare John H. Hamilton, arcivescovo cattolico di St. Andrews a Edimburgo, sofferente, si credeva, di tisi, che, col tempo, era andata aggravandosi.
Come ci racconta Attilio Zanca nel suo libro "Cardano medico e taumaturgo", Cardano partì il 22 febbraio 1552 e il 13 marzo giunse a Lione dove incontrò l'arcivescovo scozzese, poi proseguirono per la Scozia dove il medico diagnosticò che la malattia dell'arcivescovo era asma, causata dalla vita disordinata condotta dal prelato. Gli ordinò una dieta più equilibrata, e di sostituire i cuscini e i materassi di piuma del letto dove dormiva con altri di seta grezza perché "seggendo sulle quali in fama non si vien": l'intuizione fu vincente perché l'arcivescovo guarì rapidamente e lo ricompensò con molta generosità.
Oggi possiamo pensare che la malattia di Hamilton fosse di origine allergica e che l'asma fosse causata dagli acari delle piume: se pensiamo che queste conclusioni furono dimostrate nel 1964 possiamo capire la grandezza di Cardano. Se come medico ebbe notevole successo, non fu così fortunato come astrologo: fece l'oroscopo di Gesù Cristo, ma la Chiesa che non apprezzava l'Astrologia in generale, lo accusò di eresia e lo mise in prigione per tre mesi, più altrettanti di "arresti domiciliari". Nemmeno con le profezie gli andò bene. Per l'arcivescovo – cui annunciò successo e felicità perenni – e per il giovane Edoardo VI, per il quale previde una vita oltre i cinquantacinque anni: il primo fu impiccato a Stirling nel 1571, senza processo, dai riformatori scozzesi, mentre Edoardo VI morì di tubercolosi nel giro di un anno.
Cardano come matematico fu il più famoso algebrista del Cinquecento. Si rese protagonista di un episodio che non lo mette certamente in buona luce. Il fatto è legato ad un altro matematico, Nicolò Fontana da Brescia detto il Tartaglia (per la balbuzie dovuta alle ferite alla testa infertegli durante il sacco di Brescia nel 1511). La questione riguardava la risoluzione delle equazioni di terzo grado e, dai documenti pervenutici, sembra che il nostro Cardano non si sia comportato in maniera molto corretta nei confronti di Tartaglia. Pare infatti che dopo aver attirato Tartaglia a Milano promettendo di potergli trovare un mecenate (Tartaglia infatti per la rilevante balbuzie era inadatto all'insegnamento) si facesse rivelare, sotto forma di poesia,

Alunno .... classe .... data ....

le soluzioni delle equazioni di terzo grado che Tartaglia stesso aveva trovato, promettendo di non rivelarle. Cardano e Ferrari, tuttavia, si misero a lavorare alla soluzione di Tartaglia e pervennero a una dimostrazione rigorosa. Di lì a poco Ferrari risolse anche le equazioni di quarto grado che non sarebbero state divulgabili senza pubblicare le soluzioni delle equazioni di terzo grado individuate da Tartaglia. Il risultato è ancora oggi noto come formule di Cardano.
Come abbiamo già detto, Cardano scrisse *De Ludo Aleae* sul gioco dei dadi (scritto intorno al 1525 ma pubblicato postumo nel 1663); egli amava molto questo tipo di gioco, nel quale, da una parte dissipò molte delle sue sostanze, dall'altra, qualche volta, incrementò le sue entrate, vincendo più di quanto perdesse, anche se era solito affermare che "...l'unico vantaggio deriva dal non giocare per niente...".
Nella speranza di aumentare le sue possibilità di vittoria, egli studiò a fondo il gioco a tal punto che può essere considerato il primo ad aver gettato le basi della moderna **Teoria della probabilità**. Nella sua opera egli definì la probabilità come rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quelli possibili ed enunciò due importanti teoremi: la probabilità dell'evento prodotto logico (A e B) di due eventi semplici A, B e una anticipazione della legge dei grandi numeri.

Sintesi della fonte:
http://matematica.unibocconi.it/articoli/il-calcolo-delle-probabilit%C3%A0-e-la-teoria-dei-giochi

Alunno .... classe .... data ....

Il dilemma di Monty Hall

II signor Jeavons disse che mi piaceva la matematica perché mi faceva sentire al sicuro. Disse che mi piaceva perché la matematica serve a risolvere i problemi, poi aggiunse che questi problemi erano difficili e interessanti, ma che alla fine c'era sempre una risposta chiara e diretta per tutto. Ciò che intendeva era che la matematica non è come la vita perché nella vita non esistono risposte chiare e dirette. So che era questo che voleva dire perché è quello che ha detto.

Perché il signor Jeavons non capisce i numeri.

Riporto qui di seguito una storiella abbastanza famosa dal titolo ***II problema di Monty Hall*** che ho voluto includere in questo libro perché illustra ciò che intendo dire.

In una rivista americana che si chiamava "**Parade**" una volta c'era una rubrica fissa dal titolo "**Chiedi a Marilyn**". Era diretta da una certa Marilyn vos Savant che si diceva avesse il più alto Quoziente d'Intelligenza al mondo, come veniva riportato nel volume del ***Guinness dei primati***. In questa rubrica rispondeva a quesiti di matematica inviati dai lettori. Nel settembre del 1990 il signor Craig F. Whitaker di Columbia, Maryland, le spedì questo quesito (non si tratta di una citazione diretta perché l'ho riscritto per renderlo più semplice e più facile da capire).

Un uomo partecipa a un quiz televisivo. Può vincere un'auto. Il presentatore gli mostra tre porte. Dice che dietro a una delle porte c'è l'auto in palio, mentre dietro alle altre due ci sono delle capre. Gli chiede di sceglierne una. Quella che ha indicato non viene aperta. Il presentatore invece apre una delle porte che il concorrente non ha scelto e mostra una capra (poiché lui sa cosa sta dietro a ognuna delle porte). A quel punto gli dà un'ultima possibilità prima che si spalanchino tutte le porte e vinca un'auto o una capra. Infine domanda se vuole cambiare idea e scegliere una delle porte ancora chiuse. Che cosa gli suggerisce di fare?

Marilyn vos Savant rispose che bisogna sempre cambiare e scegliere la porta finale perché ci sono due possibilità su tre che ci sia un'auto dietro quella porta.

Ma se si usa l'intuito verrebbe da pensare che le possibilità che dietro a ognuna delle due porte si trovi l'auto siano identiche, 50 a 50.

Molti scrissero alla rivista dicendo che Marilyn vos Savant aveva torto, anche se aveva fornito spiegazioni molto dettagliate sulle motivazioni della sua scelta. Il 92% delle lettere sostenevano che si era sbagliata, e molte provenivano da matematici e scienziati.

Ecco alcune delle frasi contenute in queste lettere

La generale e assoluta mancanza di competenza matematica mi sconcerta. Per favore, dia un contributo alla causa confessando il suo errore.

Robert Sachs, Ph. D., George Mason University

L'ignoranza in matematica è già sufficientemente diffusa in questo paese, senza che ci si metta anche il Q.I. più alto del mondo. Vergogna!

Scott Smith, Ph. D., University of Florida

[...]

Marilyn vos Savant però aveva ragione. Ed ecco 2 metodi per dimostrarlo.

Il primo è attraverso un procedimento matematico:

[...]

Alunno .... classe .... data ....

Il secondo è quello di fare un disegno indicando tutti i possibili risultati

Quindi, se cambi, 2 volte su 3 vinci un'auto. Se mantieni la tua decisione, vinci solo 1 volta su 3.

Questo dimostra che qualche volta l'intuito può portare all'errore. E che l'intuito è ciò che usano le persone nella vita di tutti i giorni per prendere decisioni. Ma la logica può essere utile per elaborare la risposta giusta.

Dimostra anche che il signor Jeavons aveva torto e che i numeri talvolta sono molto complicati e non così diretti e immediati come sembra. Ed ecco perché mi piace ***Il problema di Monty Hall.***

(da "*Lo strano caso del cane ucciso a mezzanotte*", M. Haddon, Einaudi, Torino, 2003, pp. 77-80)

Alunno .... classe .... data ....

Scheda docente
Il dilemma di Monty Hall

Ecco un curioso problema in cui il calcolo della probabilità permette di arrivare ad una soluzione che, in certo senso, va contro l'intuizione comune. Noto come "*Il dilemma di Monty Hall*" è legato ad un gioco a premi americano *Let's Make a Deal*, trasmesso dalla Tv americana negli anni 90. Il nome dello show deriva da quello del conduttore, Maurice Halprin, noto con lo pseudonimo di Monty Hall. In questo gioco, vengono mostrate a un giocatore tre porte chiuse; al di là di una c'è un'automobile e dietro ciascuna delle altre due si nasconde una capra. Il giocatore sceglie una porta, ma non la apre; il conduttore dello show (che conosce ciò che si trova dietro ogni porta) deve aprire un'altra porta, e poiché conosce la disposizione dei premi, ne apre una che nasconde la capra. A questo punto il presentatore offre al giocatore la possibilità di cambiare la propria scelta iniziale passando all'unica porta restante (o tenersi il premio nascosto dietro alla porta da lui scelta). La domanda è, quindi: conviene cambiare o no? Il giocatore può ragionare in questo modo: "So che in una delle due porte rimaste, tra cui quella che ho scelto inizialmente, c'è certamente l'automobile, quindi la probabilità è pari, per entrambe le porte, ad ½. Perciò è indifferente cambiare o no".
La questione, però, non finì così semplicemente. Infatti essa fu proposta nel 1990 nella popolare rubrica di domande e risposte "*Chiedilo a Marilyn*" della rivista americana *Parade* dal Sig. Craig F. Whitaker (Columbia, Maryland). La rubrica era tenuta da Marilyn vos Savant, personaggio non certo di poco conto, in quanto presente nel Guinness dei Primati per il suo altissimo Q.I. (228). Marilyn rispose che la soluzione prima fornita era errata e che al concorrente conviene sempre cambiare, in quanto la probabilità di vincita passa da ½ a 2/3.
Questa risposta non soddisfò i suoi lettori che la subissarono di lettere di proteste (tra cui, molti matematici insigniti del Ph.D, titolo equivalente al nostro dottorato di ricerca) che contestavano la soluzione della vos Savant.
Persino Paul Erdos, uno dei più grandi matematici del ´900 disse «Impossibile. Non può fare differenza il cambiare la porta» (da «*L'uomo che amava solo i numeri*», P. Hoffman) e dall'Università della Florida le scrissero: "Lei sembra avere difficoltà a cogliere gli aspetti fondamentali della teoria della probabilità... C'è già abbastanza ignoranza matematica nel paese, senza che si metta a creare confusione anche la persona con il più alto QI del mondo!"
Marilyn non cedette e dimostrò di essere nel giusto con un metodo molto efficace; costruì una tabella con i sei casi possibili: l'auto è dietro la porta A, B o C e il giocatore **non** cambia la scelta oppure, l'auto è dietro A, B o C e il giocatore **cambia**.
Ne risulta che se si sostituisce si vince in due casi su tre. Se non si cambia, si vince in un caso su tre. Nel caso in cui l'auto sia dietro la porta A la tabella potrebbe essere come la seguente (si tenga presente che prima della proposta di cambio il presentatore apriva una porta che nascondeva la capra):

Porta scelta	**Il giocatore cambia**	**Il giocatore non cambia**
A	Perde	Vince
B	Vince	Perde
C	Vince	Perde

Alunno .... classe .... data ....

Per chiarire ulteriormente la situazione riassumiamo i risultati delle due strategie possibili con le rispettive probabilità teoriche di vincita:

1. mantenere la scelta iniziale (P = 33%);
2. scegliere la porta non aperta (P = 67%).

Fonti e materiali utili

Si consiglia caldamente l'uso in aula e la fruizione anche diretta da parte degli allievi delle fonti e dei libri contrassegnati dall'asterisco*.

M. Haddon, *Lo strano caso del cane ucciso a mezzanotte*, Einaudi, Torino, 2003.*

H. M. Enzensberger, *Il mago dei numeri*, Einaudi, Torino, 1998.*

Bibliografia utile per un quadro complessivo della matematica

C. Colombo Bozzolo, A. Costa, *Nel mondo dei numeri e delle operazioni*, Erickson, Trento, 2002.*
B. D'Amore, *Didattica della matematica*, Pitagora, Bologna, 2001.
H. Freudenthal, *Ripensando l'educazione matematica*, La Scuola, Brescia, 1994.
C. Toffalori, *L'aritmetica di Cupido. Matematica e letteratura*, Guanda, Parma, 2011.
C. Toffalori, *Il matematico in giallo*, Guanda, Parma, 2008.*
B. Russell, *Introduzione alla filosofia matematica*, Newton Compton, Roma, 1997.

Riferimenti bibliografici

Carraher T. N., Carraher D. W., Schlieman A. D., "Mathematics in the streets and in the school", in: *British Journal of Developmental Psychology*, 3, pp. 21-29, 1985.
Cole M., *Cultural psychology*, Belknap, Cambridge, MA, 1996.
Cole M., Gay J., Glick J., Sharp D.W., *The cultural contexts of learning and thinking*, Basic Books, New York, 1971.
Di Francesco G. (Isfol, a cura di) *Ricostruire l'esperienza. Competenze, bilancio, formazione*, Angeli, Milano, 2004.
Laboratory of Comparative Human Cognition, *Culture and intelligence*, in: R. J. Stenberg (a cura di), *Handbook of intelligence*, Cambridge University Press, New York, 1982.
Laboratory of Comparative Human Cognition, *Culture and cognitive development*, in: J. H. Flavell, E. M. Markman (a cura di), *Handbook of child Psychology*, Wiley, New York, 1983.
Mason L., *Psicologia dell'apprendimento e dell'istruzione*, Il Mulino, Bologna, 2013 (1° ed. 2006).

Sulle competenze

A.A.V.V., "Competenze ed educazione degli adulti", numero monografico di *Focus on Lifelong, Lifewide Learning*, n. 10, Massa Carrara, Transeuropa (on line reperibile su rivista.edaforum.it), 2008.
A.A.V.V., "Le competenze", *Focus on Lifelong Lifewide Learning*, n. 21 (on line reperibile su rivista.edaforum.it), 2013.
F. Batini, *Insegnare per competenze*, Loescher, Torino, 2013.
F. Batini (a cura di), *Verso le competenze chiave*, Pensa Multimedia, Lecce-Brescia, 2012.
P. Brunello, A. Capone, T. Carrozzino, D. Giovannini, S. Giusti, F. Ferretti, *Valutare le competenze nel sistema scolastico*, Pensa Multimedia, Lecce-Brescia, 2011.
P.C. Rivoltella, *Neurodidattica. Insegnare al cervello che apprende*, Cortina, Milano, 2012.

Referenze fotografiche

p. 57: Enhabiten/www.etsy.com

p. 62: Lightspring /Shutter; © ICPonline

p. 51: clearviewstock/Shutterstock.com, 2013 ; Jupiter Images; © L.Fumi/Shutterstock.com, 2013; © K.Serhii/Shutterstock.com, 2013 ; © Jupiter Images, 2010; © Getty Images.

“In ogni azione competente sono contenute delle conoscenze che permeano il soggetto in profondità, in modo tale, cioè, che gli sia consentito di mobilizzarle e utilizzarle per agire.”

— Federico Batini

Federico Batini insegna Metodologia della ricerca in Educazione, Pedagogia sperimentale e consulenza pedagogica all'Università di Perugia. Si occupa da quindici anni di formazione e ha insegnato per dieci anni nella scuola secondaria di primo e secondo grado. Ha lavorato come docente nelle SSIS e attualmente insegna nel TFA occupandosi, in particolare, del tema della didattica, della progettazione e valutazione per competenze.

SUL WEB: www.loescher.it/competenze

31049_PH1

NELL'ELENCO DEI LIBRI DI TESTO INDICARE L'INTERO CODICE ISBN

GRATUITO

31049
BATINI
ANALIZZO, INTERPRETO, RISOLVO

ISBN 978-88-58-31049-6

9 788858 310496

11400